

Sveučilište u Zagrebu
Prirodoslovno-matematički fakultet
Fizički odsjek
Istraživački studij fizike
Andrej Dundović

Dekoherenčija i problem mjeranja u kvantnoj mehanici

Diplomski rad

Voditelj diplomskog rada: dr. sc. Hrvoje Nikolić

Zagreb, rujan 2013.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
FIZIČKI ODSJEK

SMJER: ISTRAŽIVAČKI STUDIJ FIZIKE

Andrej Dundović

Diplomski rad

Dekoherenčija i problem mjeranja u kvantnoj mehanici

Voditelj diplomskog rada: dr. sc. Hrvoje Nikolić

Ocjena diplomskog rada: _____

Povjerenstvo: 1. _____

2. _____

3. _____

Datum polaganja: _____

Zagreb, 2013.



© 2013. Andrej Dundović.

Diplomski rad dostupan je pod licencom *Creative Commons Imenovanje 3.0 Hrvatska*:
<http://creativecommons.org/licenses/by/3.0/hr/>

Zahvale

Prvenstveno zahvaljujem voditelju, dr. sc. Hrvoju Nikoliću, jer mi je pomogao razjasniti mnoge konceptualne nejasnoće na koje sam naišao pišući ovaj rad. Jednokratnu, ali vrlo korisnu raspravu imao sam s prof. dr. sc. Tihomirom Vučeljom, nakon koje sam otklonio neke nedoumice oko Bohrove interpretacije, na čemu mu zahvaljujem. Nataša Dimitrijević imala je mnogo strpljenja slušati moja razmišljanja i njezina povratna informacija govorila mi je koliko neko objašnjenje ima smisla za nekog izvan fizike. U konačnici, Nataša je i lektorirala ovaj rad. Rasprave s kolegom Petrom Pavlovićem doprinijele su mojoj snalaženju u filozofskoj terminologiji, što mi je uvelike pomoglo u čitanju filozofskog dijela literature koju sam koristio. Stoga svim navedenim osobama dugujem zahvale.

Sadržaj

1 Uvod	1
2 Formalizam kvantne mehanike	4
2.1 Postulati kvantne mehanike	4
2.2 Princip superpozicije	7
2.3 Kvantna isprepletost	8
2.4 Miješana stanja i matrice gustoće	10
2.4.1 Reducirana matrica gustoće	13
3 Problem mjerena	15
3.1 Općenita formulacija problema	15
3.2 Mjerenje u eksperimentu s dvije pukotine	18
3.2.1 Promatrač kao novi mjerni uređaj	20
4 Dekoherenčija	23
4.1 Jednostavan model dekoherenčije	24
4.2 Superselekcija uzrokovana okolinom	26
4.2.1 Preferirana stanja u kvantnoj granici mjerena	28
4.2.2 Preferirana stanja u kvantnoj granici dekoherenčije	29
5 Lokalizacija uzrokovana raspršenjem čestica okoline	31
5.1 Model raspršenja	32

5.2	Faktor dekoherencije	39
5.2.1	Granične vrijednosti	41
5.3	Lokalizacija uzrokovana raspršenjem fotona	42
5.4	Rezultati i diskusija	46
6	Uloga dekoherencije u interpretacijama kvantne mehanike	50
6.1	Kopenhaška interpretacija	51
6.2	Standardne interpretacije	52
6.3	Interpretacije relativnih stanja	55
7	Zaključak	57
Dodaci		60
Von Neumannovo mjerjenje	60	
Schmidtov rastav	62	
Izvorni kodovi programa korištenih u radu	64	
Bibliografija		69
Summary		74

1 | Uvod

Kvantnu mehaniku prati neobičan razvoj – sama se teorija razvijala brže nego što su je njezini začetnici uspijevali tumačiti i prihvaćati. Razlog je taj što su njezini temeljni koncepti uvelike odsakali od intuitivne predodžbe svijeta koja je izražena u formi klasične mehanike. Ni desetak fizičara koji su najviše doprinijeli osnutku nove teorije nisu se međusobno nikad složili oko jedinstvene interpretacije, što se najbolje može vidjeti po izvještajima s pete Solvayeve konferencije održane 1927. godine [1]. Takav rascjep postoji i danas. Nedavno provedena anketa na konferenciji o temeljnim problemima kvantne teorije ukazuje na to da u znanstvenoj zajednici nema konsenzusa oko većine temeljnih pitanja na kojima leži kvantna teorija [2]. Zbog takve obeshrabrujuće situacije mnogi fizičari ne žele ni ulaziti u tu problematiku, često je odbacujući kao besmislenu u kontekstu fizike. No svatko tko želi izaći iz čisto pragmatičnoga pristupa kvantnoj mehanici, ne može izbjegći pitanja o tome kakvu sliku svijeta ta teorija daje i kako interpretirati njezin formalizam.

Jedno od glavnih temeljnih pitanja jest kako klasični svijet izvire iz kvantnoga ako se pretpostavi da je kvantna mehanika univerzalna teorija, a nema eksperimentalnih naznaka da to nije. Štoviše, kvantna mehanika slovi kao najbolja fizikalna teorija do sada u kontekstu slaganja eksperimenta s predviđanjima teorije, ali opet, najvažniji eksperiment od svih – naše svakodnevno iskustvo – proturječi njezinim temeljnim postulatima. Zašto čovjek ne vidi tzv. Schrödingerove mačke? Razlaganje tog neslaganja na matematički pristupačniji oblik dovelo je do ustroja problema mjerjenja. Problem mjerjenja nastao je u opreci između iskustva koje ukaže da je makrosvijet dirigiran zakonima klasične fizike i prepostavke da je kvantna mehanika univerzalna teorija. Mnogi su došli do zaključka da je ljudska svijest ta koja je posebna i koja

čini razliku [3], no svijest je vrlo nezgodno mjesto za fizikalni pristup rješavanju problema.

Konkretan napredak u razumijevanju ovog problema počeo se nazirati prije tridesetak godina kad je uočeno da okolina kvantnoga sustava igra puno značajniju ulogu nego što se dotada mislilo. Takav je pristup prije toga uvelike bio zanemaren zbog utjecaja klasične paradigme koja je uvijek bila usmjerenata na proučavanje fizikalnog sustava u izolaciji, no novim konceptom dekoherencije uočeno je da kvantni sustav brzo mijenja svoju prirodu, čak i pri minimalnom međudjelovanju s okolinom. Za nezanemariv utjecaj dekohrenecije na makroskopski sustav dovoljno je da okolinu čine samo niskoenergetski fotoni sveprisutnog pozadinskog kozmičkog zračenja [4]. Dosadašnji program dekoherencije uvelike je razjasnio problem mjerena i prelaska kvantnog u klasični svijet, ali ga nije do kraja riješio. Pitanje interpretacije, ali i daljnji razvoj programa dekoherencije, ostaju i dalje relevantne teme.

Program dekoherencije postaje sve popularniji i izvan svoje domene: dekoherencija se uvrštava u knjige iz kvantne mehanike kao nezaobilazna tema [5, 6], razvijaju se eksperimentalne metode koje iskorištavaju posljedice dekohrenecije, za što je prošle godine dodijeljena i Nobe-lova nagrada iz fizike [7] te je u konačnici dekoherencija postala ključna tema u novim propulzivnim područjima istraživanja – područjima kvantnih računala i kvantne kriptografije.

Dekoherencija stoga predstavlja posebno zanimljivu temu za proučavanje jer direktno objedinjuje oba konteksta fizike: filozofski značaj i praktičnu primjenu.

Ovaj je rad podijeljen u tri dijela. U prvom je dijelu (poglavlja 2, 3 i 4) cilj ukratko ponoviti osnovne prepostavke kvantomehaničkog formalizma, istaknuti njegove posljedice koje najviše odudaraju od klasičnoga iskustva te predstaviti koncept dekoherencije koji donekle razjašnjava navedenu proturječnost ne izlazeći pritom iz danoga okvira formalizma. Obraden je pokus s dvije pukotine kao najilustrativniji primjer djelovanja mehanizma dekoherencije te je dan kratki pregled posljedica dekoherencije.

Drugi dio rada (poglavlje 5) istraživačke je prirode. Program dekoherencije može se smatrati uspješnim tek ako daje i eksperimentalno mjerljive rezultate, a oni proizlaze iz konkretnih modela koji opisuju dinamiku dekoherencije. Jedan od primjera eksperimentalno mjerljivih rezultata jest vremenska skala dekoherencije koja ukazuje na brzinu nestanka prostorno delokaliziranih stanja promatranog objekta u ovisnosti o vrsti i intenzitetu međudjelovanja objekta

i okoline. Brzi napredak eksperimentalnih metoda koje mogu mjeriti ovakve sustave zahtjeva i preciznije teorijske izračune. S tom motivacijom u ovom je radu napravljen račun koji analitičkim i numeričkim metodama želi upotpuniti aproksimativni račun za lokalizaciju makroskopskih masivnih objekata koja je uzrokovana fotonskim raspršenjima. Ova popravka računa time omogućuje i bolju eksperimentalnu provjeru dekoherencije na područjima gdje se analitičko-numerički rezultat razlikuje od standardnog aproksimativnog računa. Razlika je izražena upravo u vremenskoj skali dekoherencije, no nažalost izostaje usporedba s eksperimentom koji još nije dostigao potrebnu razinu preciznosti u području gdje se računi razlikuju.

Zadnji dio rada (poglavlje 6) posvećen je neizostavnoj komponenti kvantne teorije – njezinoj interpretaciji. Dolaskom dekoherencije poduprte novim eksperimentalnim podacima, aktualne interpretacije moguće je preispitati i analizirati u tom novom kontekstu. Ovdje je takvo razmatranje učinjeno na dvije klase popularnih interpretacija: standardnim interpretacijama i interpretacijama relativnih stanja. No da bi se išta reklo o utjecaju dekoherencije na najraširenije interpretacije, one standardne, bilo je nužno prije svega dati sustavnije objašnjenje što se točno misli pod sintagmom standardne interpretacije jer, sudeći po literaturi, kod njih vlada naročita zbrka.

2 | Formalizam kvantne mehanike

Temeljni principi teorije kao i fizikalni uvidi zahtijevaju interpretaciju oko koje nema konsenzusa, stoga je logično krenuti od samog formalizma teorije. Oko formalizma kvantne mehanike sve se strane fizikalne zajednice slažu, eventualno oni koji se zalažu za jedno tumačenje mogu prigovoriti drugima da naglašavaju krive točke formalizma, no nema slučaja da jedni misle da drugi prezentiraju naprsto krivi formalizam¹.

2.1 Postulati kvantne mehanike

Kvantna je teorija započeta kao skup objašnjenja pojedinih fenomena² koji se nisu mogli uklopiti u dotad dominantnu (klasičnu) teoriju, no trebalo je proći dvadesetak godina prije nego što je skup tih partikularnih objašnjenja oblikovan u cjelovitu teoriju opisanu konzistentnim matematičkim formalizmom.

Matematički formalizam kvantne mehanike apstrahirao je sva pravila i pojedinačne opise u sljedeći skup postulata [10, pog. 2]:

1. Čisto stanje fizikalnog sustava opisano je vektorom³ u kompleksnom Hilbertovu prostoru koji je pridužen tom sustavu.
2. Svaka je opservabla fizikalnog sustava reprezentirana kao linearni samoadjungirani (eng.

¹Detaljnija argumentacija ovog pristupa može se naći u [8, *Non-Relativistic Quantum Mechanics*, pog. 1].

²Najpoznatiji su primjeri [9] zračenje crnog tijela (Planck, 1900.), fotoelektrični efekt (Einstein, 1905.), Bohrov model atoma (Bohr, 1913.) i Comptonovo raspršenje (Compton, 1923.).

³Zapravo je stanje opisano zrakom jer vektor pomnožen s proizvoljnom kompleksnom konstantnom predstavlja isto fizikalno stanje.

self-adjoint) operator koji djeluje na Hilbertovu prostoru pridruženom promatranom fizikalnom sustavu.

3. Fizikalni sustav u čistom stanju opisan normaliziranim vektorom $|\psi\rangle$ prilikom mjerena poprima jedno od svojstvenih vrijednosti o_i ($o_i \in \mathcal{R}$) observable \hat{O} s vjerojatnošću

$$P_{\hat{O},\psi}(o_i) = |\langle o_i | \psi \rangle|^2 \quad (2.1)$$

gdje je $|o_i\rangle$ svojstveni vektor od \hat{O} kojem je pridružena svojstvena vrijednost o_i ⁴.

4. Ako je fizikalni sustav u stanju $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$ ⁵ prije mjerena, stanje koje je rezultat idealnog mjerena observable \hat{O} opisano je matricom gustoće $\hat{\rho}_O$:

$$\hat{\rho}_O \sim \sum_j \hat{P}_j \hat{\rho} \hat{P}_j \quad (2.2)$$

gdje je \hat{P} projektor različitih svojstvenih stanja operatora \hat{O} dan s $\hat{P}_j = |o_j\rangle\langle o_j|$.

5. Evolucija čistog stanja između dvaju uzastopnih mjerena određena je Schrödingerovom jednadžbom

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle = \hat{H}(t) |\Psi(t)\rangle \quad (2.3)$$

gdje je $\hat{H}(t)$ observable zvana hamiltonijan sustava.

6. Za fizikalni sustav u kojem kartezijeve koordinate q_1, q_2, \dots, q_N odgovaraju konjugiranim momentima p_1, p_2, \dots, p_N , operatori observable \hat{X}_i i \hat{P}_j moraju zadovoljiti sljedeće komutacijske relacije:

$$[\hat{X}_i, \hat{X}_j] = 0, \quad [\hat{P}_i, \hat{P}_j] = 0, \quad [\hat{X}_i, \hat{P}_j] = i\hbar\delta_{ij}I. \quad (2.4)$$

Treba napomenuti da odabir ovih postulata nije jednoznačan te da se najčešće ovaj oblik poistovjećuje s takozvanim kopenhaškim pristupom [10, pog. 2]. Ovisno o interpretaciji, u pravilu su treći i četvrti postulat diskutabilni.

⁴Radi jednostavnosti uzeto je da \hat{O} ima samo diskretan spektar, što će vrijediti i za daljnji tekst.

⁵U potpoglavlju 2.4 bit će objašnjen ovaj zapis stanja u obliku matrice gustoće.

Kontekst i kratko objašnjenje ovih postulata može se dati na sljedeći način.

Za razliku od klasične fizike, stanje fizikalnog sustava u kvantnoj mehanici u potpunosti je opisano apstraktnim vektorom stanja (1. postulat) na način na koji je nemoguće napraviti direktnu poveznicu s čovjeku iskustvenim veličinama poput položaja ili brzine. Ta nemogućnost predstavlja glavnu prepreku ka intuitivnoj reprezentaciji kvantne mehanike.

Ipak kvantna mehanika uspostavlja indirektnu vezu preko observable (2. postulat) koja je formalno reprezentirana samoadjungiranim, odnosno Hermitskim operatorom⁶ koji je definiran kao $\hat{O} = \hat{O}^\dagger$. Djelovanje operatora observable na sustav po Bornovom pravilu (2.1) daje vjerojatnosti ishoda mjerena, gdje ishod može biti samo svojstveno stanje tog operatora koje odgovara konkretnoj fizikalnoj veličini. Time je omogućena i eksperimentalna provjera teorije jer na statistički način povezuje rezultat formalizma s mjerljivim veličinama.

Mjerenje generalno nepovratno mijenja prijašnje stanje sustava, čime se onemogućuje utvrđivanje drugih veličina čiji operatori ne komutiraju s operatorom upravo izmjerene observable. Taj čin promjene stanja prilikom mjerena postulira se tzv. redukcijom valnog paketa ili kolapsom stanja, a unutar formalizma predstavljen je projekcijskim postulatom (2.2)⁷. Kvantna mehanika time stavlja ograničenje na način kako dobiti ukupno znanje o sustavu. Ono se može dobiti samo mjerenjem potpunog skupa kompatibilnih observabli – svih onih koje međusobno komutiraju (2.4). U klasičnoj mehanici ne postoji takvo ograničenje, odnosno sustav je moguće mjeriti arbitarno mnogo puta i na arbitarno različite načine kako bi se utvrdile sve fizikalne veličine koje opisuju sustav jer čin mjerena ne mijenja sustav. Na primjer dok u klasičnoj mehanici ne postoji fundamentalna prepreka za istovremenim mjerenjem položaja i impulsa, za kvantnu mehaniku te su observable nekomutativne, čime ih je nemoguće odrediti istovremeno i tako, sa stajališta klasičnih koncepata, potpuno stanje sustava nije dostupno.

⁶U fizici se često Hermitski operator poistovjećuje sa samoadjungiranim [5, str. 46], ali postoji razlika u beskonačno dimenzionalnom Hilbertovu prostoru gdje je samo omeđni samoadjungirani operator ujedno i Hermitski [11]. Uvjet da operator observable bude Hermitski proizlazi iz zahtjeva da njegove svojstvene vrijednosti budu realne kako bi mogle reprezentirati fizikalne veličine [5].

⁷U literaturi se pojavljuju dva oblika projekcijskog postulata, onaj koji za rezultat daje matricu miješanog stanja (definiran sa sumom) i onaj koji daje čisto stanje (definiran bez sume). Kad se spominje projekcijski postulat, mislit će se na ovdje danu definiciju (sa sumom), ali kad se spominje kolaps, mislit će se na oblik koji daje čisto stanje.

Suština problema mjerjenja, a time i ovog rada, sadržana je upravo u četvrtom postulatu jer je taj prijelaz uzrokovan mjerenjem diskontinuiran, nekauzalan, trenutačan, neunitaran i ireverzibilan [5, str. 285], što predstavlja svojevrsan problem za sam formalizam jer ga ne prepoznaće unutar drugih postulata, ali i za interpretaciju koja mora napraviti velik skok u odnosu na koncepte klasične mehanike.

Dinamika kvantne mehanike izvan mjerjenja zadana je Schrödingerovom jednadžbom (2.3) koja na deterministički i unitarni način opisuje evoluciju kvantnog sustava zbog čega ne može objasniti proces redukcije.

Ovime je postavljen temelj za daljnji razvoj matematičkog alata potrebnog za opis problema mjerjenja. Nužno je prije toga razmotriti i neke posljedice ovih postulata: princip superpozicije i kvantu isprepletenost (eng. *quantum entanglement*) [12], a tek onda prezentirati dodatni matematički alat – matrice gustoće.

2.2 Princip superpozicije

Princip je superpozicije direktna posljedica linearnosti Hilbertova prostora, no ponekad se i zasebno postulira da bi se istakla njegova važnost [13, pog. 2]. Princip superpozicije garantira da linearna kombinacija vektora $|\psi_n\rangle$, koji reprezentiraju valjana kvantna stanja također reprezentira valjano kvantno stanje:

$$|\Psi\rangle = \sum_n c_n |\psi_n\rangle \quad (2.5)$$

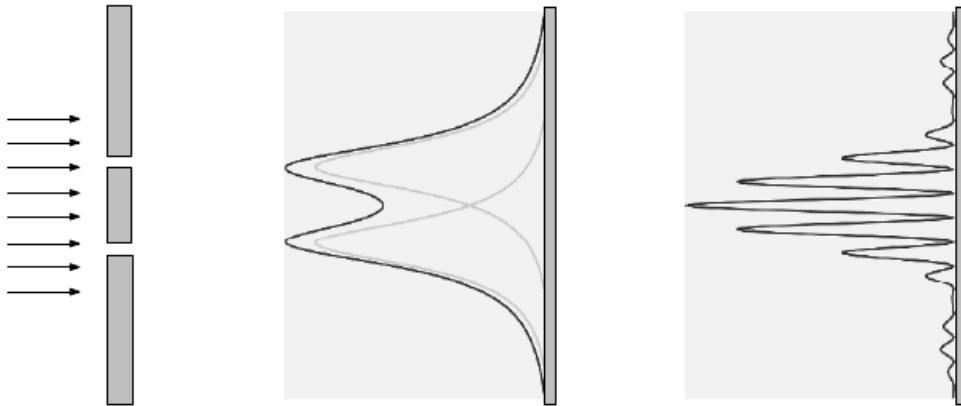
gdje su c_n arbitrarni kompleksni koeficijenti.

Bitno je primjetiti da princip superpozicije ne predstavlja pravu mješavinu (eng. *proper mixture*), odnosno klasičan ansambl stanja u smislu da je samo jedna komponenta “stvarno” stanje dok su ostale prisutne zbog neznanja o sustavu samo zato što nije moguće *a priori* odrediti koja je od tih komponenata “stvarno” prisutna. Svaka je komponenta kvantne superpozicije “stvarno” prisutna u ukupnom stanju, što se može eksperimentalno potvrditi postojanjem koherenčije između tih stanja. To se eksperimentalno može pokazati na više načina, a jedan od njih je uz pomoć interferencije.

Poznat je primjer prolaska pojedinačnih elektrona kroz pregradu s dvije pukotine u kojem je stanje elektrona tada opisano s $|\psi\rangle = (|\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle)/\sqrt{2}$, gdje komponente $|\psi_1\rangle$ i $|\psi_2\rangle$ reprezentiraju prolazak elektrona kroz prvu, odnosno drugu pukotinu. Mjerenjem prostorne gustoće elektrona koji su detektirani na zaslonu dobiva se

$$\rho(x) = \frac{1}{2}|\psi_1(x) + \psi_2(x)|^2 = \frac{1}{2}|\psi_1(x)|^2 + \frac{1}{2}|\psi_2(x)|^2 + \text{Re}\{\psi_1(x)\psi_2^*(x)\} \quad (2.6)$$

čak i kad se samo jedan elektron nalazi u postavu. U klasičnom slučaju za česticu (elektron) očekivalo bi se $\rho(x) \propto |\psi_1(x)|^2 + |\psi_2(x)|^2$, odnosno ne bi trebao postojati interferentni član $\text{Re}\{\psi_1(x)\psi_2^*(x)\}$.



Slika 2.1: Eksperiment s dvije pukotine prikazuje amplitude vjerojatnosti bez i sa koherentnim članom koji je odgovoran za interferenciju (izvor: [14]).

2.3 Kvantna isprepletenost

Drugi je bitan koncept za ovu temu kvantna isprepletenost. Dobar je pedagoški primjer isprepletenosti onaj kojim se opisuje EPR-ov misaoni eksperiment [15, 16], a pripisuje se Davidu Bohmu.

Dan je par čestica spina $\frac{1}{2}$ tako da svaka od njih ima dva moguća stanja, $|0\rangle$ ili $|1\rangle$. Ukupno stanje sustava $|\Psi\rangle$ tih dviju čestica može biti zapisano vektorima koji predstavljaju neku od

kombinacija zasebnih stanja:

$$|0\rangle_1|0\rangle_2, \quad |1\rangle_1|0\rangle_2, \quad |0\rangle_1|1\rangle_2, \quad |1\rangle_1|1\rangle_2. \quad (2.7)$$

Ako je svaka zasebna kombinacija valjano stanje, iz superpozicije slijedi da je onda i svaka linearna kombinacija tih stanja također valjano stanje, pa tako i ovo, tzv. Bellovo stanje:

$$|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_1|1\rangle_2 + |1\rangle_1|0\rangle_2). \quad (2.8)$$

U takvom stanju čestice su kvantno isprepletene.

Općenito se kvantna isprepletost može definirati na sljedeći način [5, pog. 5.5]: sustav \mathcal{S} opisan vektorom stanja $|\Psi\rangle$ sastavljen je od dva podsustava \mathcal{S}_1 i \mathcal{S}_2 ; \mathcal{S} je isprepletten u odnosu na \mathcal{S}_1 i \mathcal{S}_2 ako se ne može zapisati kao tensorski produkt vektora stanja tih dvaju podsustava, odnosno ako ne postoje vektori $|\psi_1\rangle$ i $|\phi_2\rangle$ iz podsustava \mathcal{S}_1 i \mathcal{S}_2 , tako da vrijedi

$$|\Psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\phi_2\rangle. \quad (2.9)$$

Ubuduće će znak direktnog produkta \otimes biti izostavljen radi jednostavnijeg zapisa.

Kad su \mathcal{S}_1 i \mathcal{S}_2 isprepleteni, ne može ih se proučavati kao zasebne cjeline te sustav \mathcal{S} koji ih objedinjuje ima fizikalna svojstva koja se ne mogu izvesti samo iz svojstava \mathcal{S}_1 i \mathcal{S}_2 . Isprepletost stoga predstavlja fundamentalno odstupanje od klasično-mehaničkih koncepcata jer se cjelina ne može opisati samo pomoću dijelova od kojih je sastavljena. Dodatne informacije o sustavu \mathcal{S} spremljene su upravo u isprepletost, odnosno u kvantne korelacije.

Na primjeru s dvijema česticama spina $\frac{1}{2}$ koje su opisane stanjem (2.8), mjerenjem spina jedne od njih⁸ nestaje superpozicija i mjeri se samo jedno od stanja ($|0\rangle_i$ ili $|1\rangle_i$) čime se otkriva da druga čestica ima suprotno stanje jer ukupan spin sustava i dalje mora biti očuvan. Iznenadujuće je da ovo vrijedi bez obzira na prostornu udaljenost između čestica, ali ipak specijalna teorija relativnosti ovdje nije narušena jer se na ovaj način ne može trenutno propagirati informacija kad je izbor stanja posve nasumičan, tj. nemoguće je ciljano navesti česticu da odabere

⁸Prema trećem postulatu mogući ishodi opservable spina samo su svojstvene vrijednosti spina, a to je ovdje spin gore ili spin dolje.

određeno stanje. Teorem kojim se ovo nenarušenje formalno objašnjava naziva se *no-signaling theorem* [8, *Non-Relativistic Quantum Mechanics*, pog. 6].

Isprepleten sustav može imati različitu kvantitativnu mjeru isprepletenosti. Primjer maksimalne isprepletenosti predstavlja navedeni primjer Bellovog stanja (2.8), dok minimalna isprepletenost predstavlja posve odvojene podsustave, odnosno nepostojanje isprepletenosti među njima.

Mjera isprepletenosti ovisi o tome koliko se stanja koja su pridružena podsustavima međusobno preklapaju ili razlikuju. Na primjer isprepletenost stanja sustava danog s

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_1\rangle|\phi_1\rangle \pm |\psi_2\rangle|\phi_2\rangle) \quad (2.10)$$

gdje su stanja $|\psi_i\rangle$ i $|\phi_i\rangle$ ($i = 1, 2$) iz podsustava \mathcal{S}_1 i \mathcal{S}_2 arbitrarna i ne više nužno ortogonalna, ovisi o preklapanju $|\psi_1\rangle$ sa $|\psi_2\rangle$ i $|\phi_1\rangle$ sa $|\phi_2\rangle$. U slučaju potpunog preklapanja samo jednog od njih $|\phi_1\rangle = |\phi_2\rangle = |\phi\rangle$ isprepletenost u potpunosti nestaje i sustav se može zapisati kao tensorski produkt dvaju podsustava:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_1\rangle \pm |\psi_2\rangle)|\phi\rangle. \quad (2.11)$$

U kontekstu mjerenja, preklapanje predstavlja neraspoznatljivost stanja – nikakvo pojedinačno mjerenje, neovisno o bazi, ne može odrediti razliku između takvih dvaju stanja. Moguće je prepostaviti slučaj u kojem je potpuna informacija o takvim dvama stanjima zapisana u više fotona. Gubitak jednog fotona predstavlja gubitak dijela informacije, a gubitak svih fotona znači potpuni gubitak informacije o razlici stanja. Ako uređaju promakne jedan foton, više se ne može s potpunom sigurnošću utvrditi razlika stanja koju uređaj mjeri. Ako mu promaknu svi fotoni, uređaj ne može nikako razlikovati dva stanja.

2.4 Miješana stanja i matrice gustoće

Kao što je već navedeno u uvodu ovog poglavlja, čisto stanje moguće je pripremiti određivanjem svih kompatibilnih opservabli. Na primjeru čestice spina $\frac{1}{2}$ provučene kroz Stern-Gerlachov

postav⁹ da bi se odabrale samo one spina gore i zatim se ubrzale u akceleratoru tako da imaju točan impuls \mathbf{p} , predstavljaju čestice čistog stanja opisane vektorom $|\mathbf{p}, \frac{\hbar}{2}\rangle$. Međutim ako se elektromagnet u Stern-Gerlachovom dijelu eksperimenta "pokvari" na način da nasumično oda-bire čestice, malo one spina gore, malo one spina dolje, ukupno stanje čestice tada nije čisto, već je opisano klasičnim ansamblom $\{p_1|\mathbf{p}, \frac{\hbar}{2}\rangle, p_2|\mathbf{p}, -\frac{\hbar}{2}\rangle\}$ gdje su p_1 i p_2 vjerojatnosti da Stern-Gerlachov postav odabere česticu spina gore, odnosno spina dolje. Vjerojatnosti su u tom slučaju u potpunosti klasičnog podrijetla.

Da bi teorija uopće mogla bila eksperimentalno provjerena, mora dati broj koji odgovara očekivanoj vrijednosti fizikalne veličine koju eksperiment mjeri. Iz 3. postulata i po uzoru na klasičnu očekivanu vrijednost, očekivana vrijednost pripadajuće kvantne observable A s obzirom na neko čisto normalizirano stanje $|\psi\rangle$ dana je s $\langle \hat{A} \rangle_{\psi} = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle$.

U slučaju miješanog stanja ta očekivana vrijednost računa se po svakom postojećem čistom stanju koje se nalazi u tom ansamblu s pripadajućom klasičnom vjerojatnosti p_i :

$$\langle \hat{A} \rangle = \sum_i p_i \langle \psi_i | \hat{A} | \psi_i \rangle \quad (2.12)$$

Prikladno je u ovom trenutku razviti matematički alat matrice gustoće da bi se očekivana vrijednost opservable u oba slučaja (i čistom i miješanom stanju) prikazala na uniforman način. Očekivana vrijednost nekog miješanog stanja može se raspisati na ovaj način:

$$\begin{aligned} \langle \hat{A} \rangle &= \sum_i p_i \langle \psi_i | \hat{A} | \psi_i \rangle = \sum_{i,j} p_i \langle \psi_i | \phi_j \rangle \langle \phi_j | \hat{A} | \psi_i \rangle \\ &= \sum_{i,j} \langle \phi_j | \psi_i \rangle \langle \psi_i | p_i \hat{A} | \phi_j \rangle = \sum_j \langle \phi_j | \left\{ \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \right\} \hat{A} | \phi_j \rangle \\ \langle \hat{A} \rangle &= \text{Tr}(\hat{\rho} \hat{A}) \end{aligned} \quad (2.13)$$

gdje je Tr trag matrice, a $\hat{\rho}$ matrica gustoće definirana kao $\hat{\rho} \equiv \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|$.

U slučaju da se ne radi o miješanom stanju, već o čistom, formula (2.13) ostaje ista, samo u matrici gustoće sve vjerojatnosti p_i iznose 0, osim jedne koja tada mora biti 1 jer je zbroj svih vjerojatnosti po definiciji $\sum_i p_i = 1$. Tada matrica gustoće poprima oblik $\hat{\rho} = |\psi\rangle \langle \psi|$.

⁹Stern-Gerlachov eksperiment na temelju spina čestice iskorištava superpoziciju stanja spina na analogan način kao što to radi eksperiment s polarizacijom svjetlosti [17, pog. 1].

Neka od svojstava matrice gustoće su [10, pog. 2]:

$$\hat{\rho}^\dagger = \hat{\rho}; \quad \hat{\rho} \geq \hat{\rho}^2; \quad \hat{\rho} \geq 0; \quad \text{Tr}(\hat{\rho}) = 1. \quad (2.14)$$

Važno je razlikovati matricu gustoće miješanog i čistog stanja u onom trenutku kad se čisto stanje raspiše u drugoj bazi

$$\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi| = \sum_{i,j} \sqrt{p_i p_j} |\psi_i\rangle\langle\psi_j| = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| + \sum_{i \neq j} \sqrt{p_i p_j} |\psi_i\rangle\langle\psi_j| \quad (2.15)$$

jer matrica gustoće čistog stanja uvijek sadrži i nedijagonalne (koherentne) članove.

Sada je uz pomoć matrica gustoće moguće jednostavno kvantificirati stupanj, tj. mjeru miješanosti jer za čisto stanje uvijek vrijedi

$$\hat{\rho}^2 = |\psi\rangle\langle\psi|\psi\rangle\langle\psi| = \hat{\rho} \quad (2.16)$$

čime se ta relacija može upotrijebiti kao identifikator čistog stanja. U slučaju miješanog stanja isti postupak daje

$$\hat{\rho}^2 = \sum_{i,j} p_i p_j |\psi_i\rangle\langle\psi_i|\psi_j\rangle\langle\psi_j| \leq \sum_i p_i^2 |\psi_i\rangle\langle\psi_i| < \hat{\rho} \quad (2.17)$$

gdje prva nejednakost postaje jednakost kad $\langle\psi_i|\psi_j\rangle = \delta_{ij}$ ¹⁰, a druga općenito vrijedi jer su svi $p_i < 1$. Prema tome za miješano stanje uvijek vrijedi $\hat{\rho}^2 < \hat{\rho}$ i time se razlikuje od (2.16). Uvjet (2.17) može odmah poslužiti i kao mjera miješanosti jer je nejednakost veća što je udio drugih komponenata u kontekstu vjerojatnosti u miješanom stanju veći.

Mjera čistoće (eng. *purity*) matrice gustoće definirana je s

$$\sigma \equiv \text{Tr}(\hat{\rho}^2) \quad (2.18)$$

pa je tako za čisto stanje $\sigma = 1$, a za miješano može imati minimalnu vrijednost $\sigma = \sum_i^N p_i^2 \geq \sum_i^N \frac{1}{N^2}$ i to kad sva stanja imaju jednaku vjerojatnost pojavljivanja, $p_i = 1/N \quad \forall i$.

¹⁰Simbol $\delta_{ii'}$ predstavlja Kroneckerovu deltu definiranu kao: $\delta_{ii'} = \begin{cases} 0, & \text{ako } i \neq i' \\ 1, & \text{ako } i = i', \end{cases}$

2.4.1 Reducirana matrica gustoće

Formalizam matrica gustoće uveden je i s ciljem opisivanja isprepletenog podsustava koji je definiran u potpoglavlju 2.3.

Ako je neki sustav \mathcal{A} isprepletan sa sustavom \mathcal{B} koji je nedostupan za mjerjenje kao u jednadžbi (2.10), postavlja se pitanje kako izračunati očekivanje observable koja djeluje samo na sustav \mathcal{A} :

$$\hat{O} = \hat{O}_{\mathcal{A}} \otimes \hat{I}_{\mathcal{B}} \quad (2.19)$$

gdje je $\hat{I}_{\mathcal{B}}$ identiteta na Hilbertovu prostoru sustava \mathcal{B} . U jednadžbi (2.10) $\{|\psi_i\rangle\}$ i $\{|\phi_j\rangle\}$ iz $\mathcal{H}_{\mathcal{A}}$ i $\mathcal{H}_{\mathcal{B}}$ nisu nužno međusobno ortogonalni, ali se zato uvijek može definirati skup baza koje to jesu $\{|a_i\rangle\}$ i $\{|b_j\rangle\}$.

Očekivana vrijednost \hat{O} tada je

$$\begin{aligned} \langle \hat{O} \rangle &= \text{Tr}(\hat{\rho}\hat{O}) \\ &= \sum_{i,j} \langle b_j | \langle a_i | \hat{\rho} (\hat{O}_{\mathcal{A}} \otimes \hat{I}_{\mathcal{B}}) | a_i \rangle | b_j \rangle \\ &= \sum_i \langle a_i | \left(\sum_j \langle b_j | \hat{\rho} | b_j \rangle \right) \hat{O}_{\mathcal{A}} | a_i \rangle \\ &= \sum_i \langle a_i | \text{Tr}_{\mathcal{B}}(\hat{\rho}) \hat{O}_{\mathcal{A}} | a_i \rangle \\ &= \text{Tr}_{\mathcal{A}} \left(\text{Tr}_{\mathcal{B}}(\hat{\rho}) \hat{O}_{\mathcal{A}} \right) = \text{Tr}_{\mathcal{A}} \left(\hat{\rho}_{\mathcal{A}} \hat{O}_{\mathcal{A}} \right) \end{aligned} \quad (2.20)$$

gdje je u zadnjem koraku napravljena pokrata

$$\hat{\rho}_{\mathcal{A}} \equiv \text{Tr}_{\mathcal{B}}(\hat{\rho}) \quad (2.21)$$

čime je definirana reducirana matrica gustoće.

Na primjeru (2.10) s predznakom plus gdje se baza $\{|\phi\rangle\}$ može prepisati u ortogonalni oblik

$|\phi_i\rangle = \sum_l c_l^{(i)} |b_l\rangle$, reducirana matrica gustoće iznosi:

$$\begin{aligned}
\hat{\rho}_{\mathcal{A}} &= \text{Tr}_{\mathcal{B}} \left(\frac{1}{2} \sum_{i,j}^2 |\psi_i\rangle\langle\psi_j| \otimes |\phi_i\rangle\langle\phi_j| \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i,j}^2 |\psi_i\rangle\langle\psi_j| \sum_k \langle b_k|\phi_i\rangle\langle\phi_j|b_k\rangle \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i,j}^2 |\psi_i\rangle\langle\psi_j| \langle\phi_j| \left(\sum_k |b_k\rangle\langle b_k| \right) |\phi_i\rangle \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i,j}^2 |\psi_i\rangle\langle\psi_j| \langle\phi_j|\phi_i\rangle . \tag{2.22}
\end{aligned}$$

Konačni rezultat pokazuje da je neraspoznatljivost (preklapanje $\langle\phi_j|\phi_i\rangle$) stanja u jednom podsustavu direktno povezana s prisustvom koherentnih članova u drugom sustavu. U slučaju krajnjeg limesa gdje su sva stanja podsustava \mathcal{B} savršeno raspoznatljiva ($\langle\phi_j|\phi_i\rangle = \delta_{ij}$), reducirana matrica $\hat{\rho}_{\mathcal{A}}$ postaje dijagonalna i tako poprima isti oblik kao i matrica gustoće miješanog sustava. Treba imati na umu da je stanje koje opisuje reducirana matrica gustoće i dalje u superpoziciji i ne smije se poistovjetiti s matricom gustoće miješanog stanja, iako opservabla koja djeluje u tom sustavu tu razliku ne vidi. Zbog toga reducirana matrica gustoće reprezentira nepravu mješavinu (eng. *improper mixture*). Ključno je uočiti da ovaj matematički postupak ne pretvara superpoziciju stanja jednog sustava kroz kvantnu isprepletenuost s drugim sustavom u klasično miješano stanje, već je samo “sakrije” prilikom primjene traga.

3 | Problem mjerena

3.1 Općenita formulacija problema

Ako se kvantna mehanika shvati kao univerzalna teorija i potpun logički sustav, onda bi i čin mjerena trebao biti opisan unutar nje. Mjerenje bi tada trebalo imati tretman kao i svako drugo međudjelovanje¹.

Mjerni uređaj stoga isto mora biti opisan unutar teorije. Kad bi recimo mjerni uređaj bio opisan klasičnom mehanikom, nikako ne bi mogao mjeriti kvantni sustav [5, pog. 9.2]. Ta tvrdnja može se pokazati na način da klasična kazaljka mjernog uređaja mjeri opservablu $\hat{O}_{\mathcal{A}}$ i njezino je međudjelovanje sa sustavom koji mjeri opisano hamiltonijanom $\hat{H}_{S\mathcal{A}}$. Zbog klasičnoga opisa kazaljke, opservabla $\hat{O}_{\mathcal{A}}$ komutira s hamiltonijanom međudjelovanja $\hat{H}_{S\mathcal{A}}$ iz čega slijedi

$$\begin{aligned}\langle \hat{O}_{\mathcal{A}} \rangle &= \langle \Psi_{S\mathcal{A}}(t) | \hat{O}_{\mathcal{A}} | \Psi_{S\mathcal{A}}(t) \rangle \\ &= \langle \Psi_{S\mathcal{A}}(t_0) | \left(e^{-i\hat{H}_{S\mathcal{A}}t} \right)^{\dagger} \hat{O}_{\mathcal{A}} e^{-i\hat{H}_{S\mathcal{A}}t} | \Psi_{S\mathcal{A}}(t_0) \rangle \\ &= \langle \Psi_{S\mathcal{A}}(t_0) | e^{i\hat{H}_{S\mathcal{A}}^{\dagger}t} e^{-i\hat{H}_{S\mathcal{A}}t} \hat{O}_{\mathcal{A}} | \Psi_{S\mathcal{A}}(t_0) \rangle \\ &= \langle \Psi_{S\mathcal{A}}(t_0) | \hat{O}_{\mathcal{A}} | \Psi_{S\mathcal{A}}(t_0) \rangle\end{aligned}\tag{3.1}$$

gdje je u zadnjem koraku iskorišteno svojstvo hermitičnosti hamiltonijana ($\hat{H}^{\dagger} = \hat{H}$). Time je pokazano da je očekivana vrijednost opservable neovisna o međudjelovanju sa sustavom, odnosno klasičan mjerni uređaj ne može uspostaviti korelaciju s kvantnim sustavom.

¹Neke interpretacije mjerenu daju poseban karakter, što će biti razmatrano u poglavlju 6.

Dobar mjerni uređaj, osim što je opisan u terminima kvantne mehanike, mora uspostaviti korelaciju između različitih stanja sustava i "kazaljke" koja prikazuje rezultat mjerjenja. Von Neumannov program [3] pokazuje kako se ta jedan-na-jedan korelacija uspostavlja i to samo na temelju unitarne evolucije (Dodatak A):

$$|\psi_i\rangle|M_0\rangle \xrightarrow{\hat{U}} |\psi_i\rangle|M_i\rangle \quad (3.2)$$

gdje je M_0 neko početno stanje mjernog uređaja prije početka mjerjenja. Proces uspostavljanja korelacije između uređaja i promatranog sustava naziva se predmjerjenje (eng. *premeasurement*). U ovom slučaju stanje sustava $|\psi_i\rangle$ u procesu nije promijenjeno jer je pretpostavljeno, radi jednostavnosti, tzv. idealno mjerjenje u kojem hamiltonijan međudjelovanja ne mijenja promatralni sustav koji je već pripremljen u određenom stanju².

Ako je sustav pripremljen u superpoziciji stanja $\sum_i c_i |\psi_i\rangle$, isto će se dogoditi i s mjernim uređajem:

$$\left(\sum_i c_i |\psi_i\rangle \right) |M_0\rangle \rightarrow \sum_i c_i |\psi_i\rangle|M_i\rangle . \quad (3.3)$$

Uredaj se ovdje ponaša kao pojačalo stanja mikrosustava, što upućuje na to da bi se posljedice superpozicije trebale opaziti i u makrosvjetu.

Bizarnost ove posljedice jasno je istaknuo Schrödinger u svojem poznatom misaonom eksperimentu s mačkom [18] u kojem na von Neumannov način (Dodatak A) prikazuje superpoziciju atoma, Geigerova brojača, boćice otrova i mačke. Ako je atom u superpoziciji raspadnutog i neraspadnutog, onda je i mačka u superpoziciji mrtvog i živog stanja. Kad promatrač otvoriti kutiju koja je izolirala taj ukupni sustav od okoline, uočava mačku samo u jednom od stanja (mrtvom ili živom), a ne u superpoziciji, kao što formalizam implicira.

Iskustvo govori da mjerjenje općenito daje samo jedan od mogućih ishoda, a ne superpoziciju. Tu proturječnost formalno razrješava postulat projekcije (2.2):

$$\hat{\rho} \rightarrow \hat{\rho}_O \sim \sum_j \hat{P}_j \hat{\rho} \hat{P}_j \quad (3.4)$$

koji pretvara matricu gustoće čistog stanja u matricu gustoće miješanog stanja. Postulat projekcije uvodi cijeli niz konceptualnih pitanja o fizikalnom značenju tog matematičkog postupka

²Takva mjerena nazivaju se mjerjenjima prve vrste [10, pog. 2].

kao što je već spomenuto u uvodu prethodnog poglavlja, a o čemu će biti više riječi u poglavlju 6. Uloga je interpretacija objasniti potrebu za postulatom projekcije, odnosno kolapsom u kontekstu ostatka teorije³ ili, ako treba, pronaći neku novu, općenitiju teoriju koja ga neće uvesti na "ad hoc" način. Osim toga, većina interpretacija izbjegava pridati privilegiran položaj mjerenu u odnosu na ostala međudjelovanja jer time teorija ovisi o promatraču i dokida njezin objektivni značaj.

Cijeli niz formalnih i konceptualnih problema kvantne mehanike vezanih uz projekcijski postulat nosi naziv *problem mjeranja*, a može se razložiti na tri zasebne kategorije problema radi lakše analize [19, 14]:

1. Raspis ukupne funkcije (3.3) nakon predmjerena u kojem mjerni instrument i sustav ulaze u kvantnu isprepletenost općenito nije jedinstven:

$$|\Psi\rangle = \sum_i c_i |\psi_i\rangle |M_i\rangle = \sum_i c'_i |\psi'_i\rangle |M'_i\rangle . \quad (3.5)$$

Ako su stanja međusobno ortogonalna, formalno vrijedi Schmidtov rastav, ali on je samo jedinstven ako su svi koeficijenti c_i međusobno različiti (Dodatak B). Kad su neki koeficijenti c_i jednaki, dalo bi se formalno zaključiti da je čin mjerena istovremeno izmjerio sve opservable $\hat{O} = \sum_i \mu_i |M_i\rangle \langle M_i|$, $\hat{O}' = \sum_i \mu'_i |M'_i\rangle \langle M'_i|$, ... koje općenito ne komutiraju što je u suprotnosti s postulatima teorije – nemoguće je istovremeno mjerene nekomutirajućih opservabli. Pored toga, takva proizvoljnost u izboru baze proturječi eksperimentu

³Valja napomenuti da je kolaps nemoguće svesti na unitarnu evoluciju (2.3). Ako je evolucija sustava opisana normaliziranim stanjem $|\psi\rangle$, onda unitarna transformacija \hat{U} po definiciji čuva skalarni produkt $\langle\psi|\hat{U}^\dagger\hat{U}|\psi\rangle = 1$. Kolaps valne funkcije zahtjeva da ishod mjerena opservable A bude jedno od svojstvenih stanja $|a_i\rangle$ operatora \hat{A} , odnosno $\hat{U}|\psi\rangle = \hat{U} \sum_j \alpha_j |a_j\rangle \sim |a_i\rangle$. Operator \hat{U} dakle mora djelovati na stanje $\hat{U}|a_i\rangle = \lambda_i |a_i\rangle$, a za ostala $\hat{U}|a_j\rangle_{j \neq i} = 0$, što bi značilo da je

$$\langle\psi|U^\dagger U|\psi\rangle = \left(\sum_j \langle a_j | \alpha_j^* \right) \hat{U}^\dagger \hat{U} \left(\sum_j a_j |a_j\rangle \right) = |\lambda_i \alpha_i|^2 \langle a_i | a_i \rangle = |\lambda_i \alpha_i|^2 \neq 1 \quad \forall \alpha_i .$$

Kolaps prema tome ne može općenito čuvati skalarni produkt i time ne može biti unitaran, osim trivijalno, kad se valna funkcija već prije mjerena nalazi u stanju $|\psi\rangle = |a_i\rangle$.

i iskustvu koji pokazuju da bi izbor baze trebao biti jednoznačan. U slučaju proizvoljnog izbora baze, bile bi opazive i "mačke" u drugim bazama, npr. "mrtvo-žive mačke": $(|\text{živa}\rangle + |\text{mrtva}\rangle)$ ili $(|\text{živa}\rangle - |\text{mrtva}\rangle)$. U literaturi ovaj problem nosi naziv *problem preferirane baze*.

2. Zašto nestaju interferentni uzorci na mezoskopskoj i markoskopskoj skali kad bi superpozicija po ovom modelu trebala biti prisutna? Uobičajeno je objašnjenje da je za masivnije objekte njihova de Broglieva valna duljina $\lambda = h/p \stackrel{\text{nerel.}}{\approx} h/(mv)$ vrlo mala te da nije moguće proizvesti uređaj tako malih dimenzija koji bi mogao razlučiti tu interferenciju. Međutim moguće je donekle zaobići takve eksperimentalne prepreke i napraviti postav u kojem interferencija ovisi isključivo o razini vakuma u postavu [20] što znači da gubitak interferencije ne ovisi samo o dimenzijama postava i masi čestica⁴. Uostalom, problem ostaje i u gore iznesenom von Neumannovom predmjerenu koje prenosi superpoziciju s mikroskale na makroskalu. Time je označen *problem neopažanja interferencije*.
3. Ishod mjerjenja već *a priori* implicira jednu konačnu vrijednost dok je superpozicija čista suprotnost, čime se otvaraju dva pitanja: Zašto je superpozicija isključena kao mogući ishod mjerjenja? Ako je već samo jedan ishod mjerjenja legitiman, kako se odabire baš taj ishod? Oba pitanja sažeta su pod nazivom *problem ishoda*.

U pokušaju da se nađu odgovori na ova pitanja, potrebno je vratiti se na proučavanje složenog sustava uz pomoć von Neumannovog programa bez projekcijskog postulata. Ovdje će biti razložen primjer složenog sustava koji se sastoji od mjernog uređaja i postava u kojem se ispučavaju elektroni kroz dvije pukotine (slika 3.1).

3.2 Mjerenje u eksperimentu s dvije pukotine

Na već spomenutom eksperimentu s dvije pukotine (potpoglavlje 2.3) u kojem je čestica opisana stanjem $|\psi_1\rangle$ ako je prošla kroz prvu pukotinu, odnosno stanjem $|\psi_2\rangle$ ako je prošla kroz drugu

⁴U superpoziciju su eksperimentalno postavljeni i objekti vidljivi golim okom – rezonator od 60 mikrometara [21].

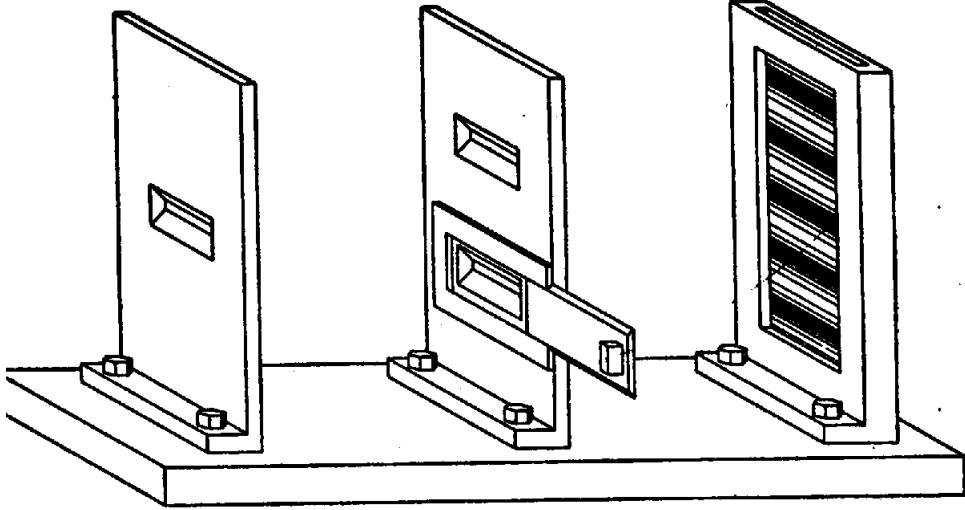


FIG. 4

Slika 3.1: Eksperimentalni postav misaonog eksperimenta koji se sastoji od prepreke s dvije pukotine i zaslona (izvor [22])

pukotinu, ukupno rješenje dano je s $|\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle$. Mjerni uređaj M mjeri kroz koju je pukotinu prošla čestica. Ako je prošla kroz prvu, uređaj se nalazi u stanju $|M_1\rangle$, ako je prošla kroz drugu, uređaj se nalazi u stanju $|M_2\rangle$. Isključen uređaj nalazi se u stanju $|M_0\rangle$.

Ukupna valna funkcija uređaja i sustava kad je uređaj isključen iznosi:

$$|\Psi_{\text{off}}\rangle = |\psi\rangle|M_0\rangle \quad (3.6)$$

gdje je $|\psi\rangle = (|\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle)/\sqrt{2}$ stanje čestice.

Kad se uređaj uključi uspostavlja se korelacija između stanja čestice i stanja mjernog uređaja (Dodatak A):

$$|\Psi_{\text{off}}\rangle = |\psi\rangle|M_0\rangle \longrightarrow |\Psi_{\text{on}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\psi_1\rangle|M_1\rangle + |\psi_2\rangle|M_2\rangle) \quad (3.7)$$

što dovodi do isprepletenosti uređaja i sustava.

Pripadajuće reducirane matrice gustoće sustava definirane s (2.21) iznose:

$$\rho_{\text{off}} = \frac{1}{2} (|\psi_1\rangle\langle\psi_1| + |\psi_2\rangle\langle\psi_2| + |\psi_2\rangle\langle\psi_1| + |\psi_1\rangle\langle\psi_2|) \quad (3.8)$$

$$\rho_{\text{on}} = \frac{1}{2} (|\psi_1\rangle\langle\psi_1| + |\psi_2\rangle\langle\psi_2| + |\psi_1\rangle\langle\psi_2|(|M_2|M_1\rangle + |\psi_2\rangle\langle\psi_1|(|M_2|M_1\rangle)) \quad (3.9)$$

U drugom slučaju iskorišten je izvod (2.22).

Prostorna raspodjela čestica na zaslonu definirana je s $\varrho(x) \equiv \langle x|\rho|x\rangle$ tako da u toj reprezentaciji dva gornja slučaja daju:

$$\varrho(x)_{\text{off}} = \frac{1}{2}|\psi_1(x)|^2 + \frac{1}{2}|\psi_2(x)|^2 + \text{Re}\{\psi_1(x)\psi_2^*(x)\} \quad (3.10)$$

$$\varrho(x)_{\text{on}} = \frac{1}{2}|\psi_1(x)|^2 + \frac{1}{2}|\psi_2(x)|^2 + \text{Re}\{\psi_1(x)\psi_2^*(x)\langle M_1|M_2\rangle\} \quad (3.11)$$

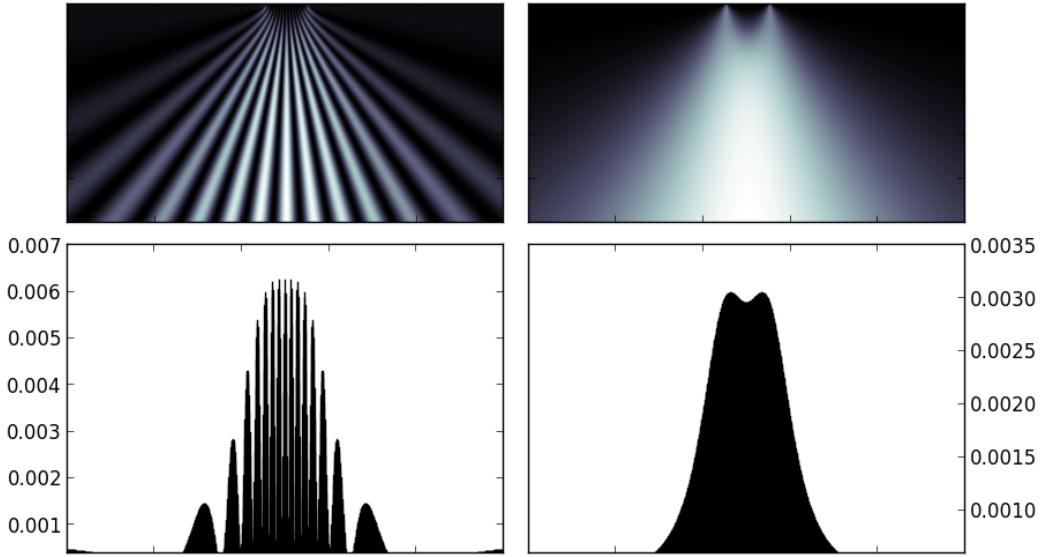
Iskorišten je standardni zapis u prostornoj reprezentaciji $\psi_1(x) = \langle x|\psi_1\rangle$ i $\psi_2(x) = \langle x|\psi_2\rangle$.

Iz ova dva rezultata može se zaključiti da prisutnost uređaja mijenja prostornu raspodjelu čestica. Kad je uređaj isključen, raspodjela sadrži koherentni član koji dovodi do interferentnog uzorka na zaslonu eksperimentalnog postava. Uključivanjem uređaja koherentni član dobiva dodatan faktor $\langle M_1|M_2\rangle$ koji se tumači kao mogućnost razlučivanja uređaja: ako uređaj sa stopostotnom sigurnošću može utvrditi kroz koju je pukotinu čestica prošla (eng. *which-path information*), spomenuti je faktor nula, čime nestaje koherentni član i gubi se interferentni uzorak. Smanjivanjem rezolucije mjernog uređaja $\langle M_1|M_2\rangle$ raste, odnosno interferencija postaje sve izraženija sve do trenutka kad uređaj više ne može razlučiti kroz koju je pukotinu prošla čestica $\langle M_1|M_2\rangle = 1$ što dovodi do istog rezultata kao i kad je uređaj isključen.

Ovim postupkom nije koherentni član “magično” nestao prilikom primjene operacije traga, već je prešao na ukupni sustav koji sadrži i mjerni instrument. Tek promatranje ukupnog sustava mjernog uređaja i čestice u eksperimentu odalo bi njegovo prisustvo. Moglo bi se reći da iz perspektive mjernog uređaja nikakve interferencije nema jer mjerni uređaj ne može mjeriti sam sebe. Logično je onda uvesti promatrača kao novi mjerni uređaj koji će promatrati stanje uređaja kad uređaj mjeri sustav.

3.2.1 Promatrač kao novi mjerni uređaj

Dodatno u gornji primjer može se uzvesti i promatrač P koji promatra rezultat mjernog uređaja. Ako ga ne promatra, njegovo je stanje $|P_0\rangle$. Ako promatrač vidi da je uređaj u stanju $|M_1\rangle$, tada je stanje promatrača $|P_1\rangle$, ako ga vidi u stanju $|M_2\rangle$, tada je u stanju $|P_2\rangle$.



Slika 3.2: Prostorna raspodjela čestica s isključenim (lijevo) i uključenim (desno) mjernim uređajem u prostoru između pukotina i zaslona (gore) i na zaslonu (dolje). Nacrtano uz program `double_slit.py` (Dodatak C).

Analogno kao i u prošlom slučaju, dobiju se dva stanja:

$$|\Psi_{\text{off}}^P\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_1\rangle|M_1\rangle + |\psi_2\rangle|M_2\rangle)|P_0\rangle \quad (3.12)$$

$$|\Psi_{\text{on}}^P\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_1\rangle|M_1\rangle|P_1\rangle + |\psi_2\rangle|M_2\rangle|P_2\rangle) \quad (3.13)$$

Promatrač je ovdje shvaćen kao novi mjerni uređaj koji je isprepleten s prvim mjernim uređajem, čime se u ukupnom sustavu nalaze tri međusobno isprepletena podsustava.

Reducirana matrica gustoće za slučaj kad promatrač ne promatra ista je kao u drugom slučaju kad su isprepleteni samo uređaj i sustav:

$$\varrho(x)_{\text{off}}^P = \frac{1}{2}|\psi_1(x)|^2 + \frac{1}{2}|\psi_2(x)|^2 + \text{Re}\{\psi_1(x)\psi_2^*(x)\langle M_1|M_2\rangle\} \quad (3.14)$$

U slučaju da su isprepletena tri podsustava, definicija (2.21) poopćuje se na:

$$\hat{\rho}_{\text{on}}^P = \text{Tr}_{M,P}(\hat{\rho}) . \quad (3.15)$$

Da bi se dobila gustoća vjerojatnosti, na matricu gustoće

$$\begin{aligned} |\Psi_{\text{on}}^P\rangle\langle\Psi_{\text{on}}^P| &= \frac{1}{2}(|\psi_1\rangle|M_1\rangle|P_1\rangle + |\psi_2\rangle|M_2\rangle|P_2\rangle)(\langle\psi_1|\langle M_1|\langle P_1| + \langle\psi_2|\langle M_2|\langle P_2|) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{ij}|\psi_i\rangle\langle\psi_j|\otimes|M_i\rangle\langle M_j|\otimes|P_i\rangle\langle P_j| \end{aligned} \quad (3.16)$$

treba operacijom traga eliminirati stupnjeve slobode i promatrača i uređaja:

$$\begin{aligned} \varrho(x)_{\text{on}}^P &= \langle x|\left(\frac{1}{2}\sum_{ij}|\psi_i\rangle\langle\psi_j|\langle M_j|M_i\rangle\langle P_j|P_i\rangle\right)|x\rangle \\ &= \frac{1}{2}|\psi_1(x)|^2 + \frac{1}{2}|\psi_2(x)|^2 + \text{Re}\{\psi_1(x)\psi_2^*(x)\langle M_1|M_2\rangle\langle P_j|P_i\rangle\}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Dovoljno je da su stanja uređaja ili promatrača ortogonalna da u gustoći vjerojatnosti nstanje interferentni uzorak. Promatrač ne mijenja gustoću vjerojatnosti ako mjerni uređaj u potpunosti raspoznaće stanja promatranog sustava.

Ovim formalnim postupkom matrica gustoće čistog stanja prešla je u reduciranu matricu gustoće koja ima identičan zapis kao i matrica gustoće miješanog stanja, ali valja ponoviti da je ovdje dobivena neprava mješavina, što znači da ovaj postupak nije istoznačan postulatu projekcije.

4 | Dekoherencija

Gubitak koherentnih članova prikazan na primjeru u prethodnom poglavlju ne događa se samo pri mjerenuj uređajem. Svako međudjelovanje sustava s okolinom može se shvatiti kao mjerjenje jer okolina (fotoni, čestice zraka i sl.) zapisuje informaciju o stanju sustava. Takvo svojstvo okoline kao sveprisutnog mjernog uređaja prvi je jasno uočio Zurek ranih osamdesetih [23].

Umjesto stanja uređaja $|M_1\rangle$ i $|M_2\rangle$, okolina može ući u kvantnu isprepletenost sa sustavom tako da dva stanja sustava "zapiše" u stanja $|E_1\rangle$ i $|E_2\rangle$:

$$\begin{aligned} |\psi_1\rangle|E_0\rangle &\rightarrow |\psi_1\rangle|E_1\rangle \\ |\psi_2\rangle|E_0\rangle &\rightarrow |\psi_2\rangle|E_2\rangle \end{aligned} \tag{4.1}$$

Jedna čestica okoline možda ne nosi potpunu informaciju o stanju sustava ($\langle e_1|e_2\rangle \approx 1$), ali mnogo njih, $|E_1\rangle = \prod_i |e_1\rangle_i$ i $|E_2\rangle = \prod_i |e_2\rangle_i$, može gotovo potpuno razlikovati dva stanja ($\langle E_1|E_2\rangle \approx 0$). Time se može pretpostaviti da je okolina dovoljna da interferencija sustava nestane. Nemogućnost mjerena cijelokupne okoline predstavlja praktično ireverzibilan gubitak koherencije sustava i taj proces nosi naziv dekoherencija ili nekad specifičnije – dekoherencija uzrokovana okolinom. Dekoherencija time nudi objašnjenje problema neopažanja interferencije definiran u poglavlju 3: gotovo se nijedan makroskopski sustav ne može izolirati od okoline s kojom stalno međudjeluje, pa tako ne može izbjegći ni dekoherenciju. Mezoskopski i makroskopski sustavi naročito su osjetljivi na dekoherenciju jer teško zbog svoje veličine mogu izbjegći međudjelovanja s okolinom.

4.1 Jednostavan model dekoherencije

Analogno dodavanju promatrača kao novog mjernog uređaja u potpoglavlju 3.2.1, na sustav čestice koja prolazi kroz dvije pukotine mogu se dodati još N novih mjernih uređaja koji imaju samo dva ortonormirana stanja $|e_1\rangle_i$ i $|e_2\rangle_i$ ($i = 1, \dots, N$). Svi oni mjere dani sustav, a korelacija se uspostavlja preko hamiltonijana međudjelovanja¹ \hat{H}_{SE} koji dominira nad vlastitim hamiltonijanima sustava \hat{H}_S i mjernih uređaja \hat{H}_E , kao i mjernih uređaja među sobom \hat{H}_{EE} :

$$\hat{H} \approx \hat{H}_{SE} = (|\psi_1\rangle\langle\psi_1| - |\psi_2\rangle\langle\psi_2|) \otimes \sum_i^N g_i (|e_1\rangle\langle e_1| - |e_2\rangle\langle e_2|)_i \bigotimes_{i' \neq i} (|e_1\rangle\langle e_1| + |e_2\rangle\langle e_2|)_{i'} \quad (4.2)$$

gdje je g_i konstanta vezanja svakog uređaja na promatrani sustav.

U početnom trenutku korelacija još nije uspostavljena, pa je ukupno stanje direktni produkt pojedinačnih, općenito superponiranih stanja:

$$|\Psi(0)\rangle = (c_1|\psi_1\rangle + c_2|\psi_2\rangle) \bigotimes_{i=1}^N (\alpha_i|e_1\rangle_i + \beta_i|e_2\rangle_i) \quad (4.3)$$

Kao što je već natuknuto označama stanja, mjerni uređaji ovdje su čestice okoline koje zapisuju informaciju o sustavu, čime cijela okolina uspostavlja korelaciju s promatranim sustavom:

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle &= e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}|\Psi(0)\rangle \\ &= e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}c_1|\psi_1\rangle \bigotimes_{i=1}^N (\alpha_i|e_1\rangle_i + \beta_i|e_2\rangle_i) + e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}c_2|\psi_2\rangle \bigotimes_{i=1}^N (\alpha_i|e_1\rangle_i + \beta_i|e_2\rangle_i) \\ &= c_1|\psi_1\rangle \bigotimes_{i=1}^N (\alpha_i e^{\frac{i}{\hbar}g_i t}|e_1\rangle_i + \beta_i e^{-\frac{i}{\hbar}g_i t}|e_2\rangle_i) + c_2|\psi_2\rangle \bigotimes_{i=1}^N (\alpha_i e^{-\frac{i}{\hbar}g_i t}|e_1\rangle_i + \beta_i e^{\frac{i}{\hbar}g_i t}|e_2\rangle_i) \\ &= c_1|\psi_1\rangle|E_1(t)\rangle + c_2|\psi_2\rangle|E_2(t)\rangle \end{aligned} \quad (4.4)$$

gdje su sve čestice okoline supstituirane s dva stanja ukupne okoline

$$\begin{aligned} |E_1(t)\rangle &= \bigotimes_{i=1}^N (\alpha_i e^{\frac{i}{\hbar}g_i t}|e_1\rangle_i + \beta_i e^{-\frac{i}{\hbar}g_i t}|e_2\rangle_i) \\ |E_2(t)\rangle &= \bigotimes_{i=1}^N (\alpha_i e^{-\frac{i}{\hbar}g_i t}|e_1\rangle_i + \beta_i e^{\frac{i}{\hbar}g_i t}|e_2\rangle_i) . \end{aligned} \quad (4.5)$$

¹Hamiltonian međudjelovanja napisan je po uzoru na model iz [19].

Kad se operacijom traga otklone svi nedostupni stupnjevi slobode (oni okoline), dobiva se sličan izraz izrazu (3.9):

$$\rho_S(t) = |c_1|^2 |\psi_1\rangle\langle\psi_1| + |c_2|^2 |\psi_2\rangle\langle\psi_2| + c_1 c_2^* |\psi_1\rangle\langle\psi_2| \langle E_2(t)|E_1(t)\rangle + c_1^* c_2 |\psi_2\rangle\langle\psi_1| \langle E_1(t)|E_2(t)\rangle. \quad (4.6)$$

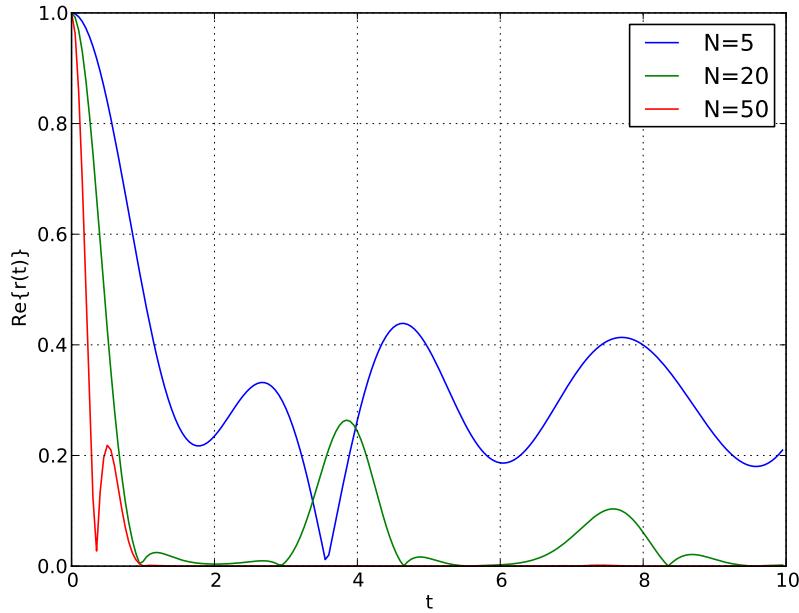
Postojanje koherentnih članova ovisi o preklapanju stanja okoline $\langle E_2(t)|E_1(t)\rangle$. Na početku ovog poglavlja bilo je navedeno da preklapanje stanja okoline teži u nulu zbog beskonačno mnogo članova, ali na ovom pojednostavljenom modelu iz (4.5) može se dobiti točno vremenska ovisnost kao i ovisnost o broju čestica okoline. Mjera preklapanja definira se kao faktor dekoherencije [14, pog. 2.10]:

$$\begin{aligned} r(t) &\equiv \langle E_2(t)|E_1(t)\rangle = \prod_{i=1}^N \left(|\alpha_i|^2 e^{\frac{i}{\hbar} g_i t} + |\beta_i|^2 e^{-\frac{i}{\hbar} g_i t} \right) \\ &= \prod_{i=1}^N \left[(|\alpha_i|^2 + |\beta_i|^2) \cos\left(\frac{g_i}{\hbar} t\right) + (|\alpha_i|^2 - |\beta_i|^2) i \sin\left(\frac{g_i}{\hbar} t\right) \right] \\ &= \prod_{i=1}^N \left[\cos\left(\frac{g_i}{\hbar} t\right) + (|\alpha_i|^2 - |\beta_i|^2) i \sin\left(\frac{g_i}{\hbar} t\right) \right] \end{aligned} \quad (4.7)$$

U zadnjem koraku iskorišteno je $|\alpha_i|^2 + |\beta_i|^2 = 1$ jer su stanja $|e_1\rangle$ i $|e_2\rangle$ ortonormirana. Kao i prije, relevantna je samo realna komponenta, čime se dobiva:

$$\begin{aligned} \text{Re}\{r(t)\} &= \prod_i^N \cos\left(\frac{g_i}{\hbar} t\right) + \dots \\ &+ (-1)^k \prod_i^{N-2k} \cos\left(\frac{g_i}{\hbar} t\right) \prod_i^{2k} \sin\left(\frac{g_i}{\hbar} t\right) (|\alpha_i|^2 - |\beta_i|^2) + \dots \\ &+ \prod_i^N \sin\left(\frac{g_i}{\hbar} t\right) (|\alpha_i|^2 - |\beta_i|^2) \delta_{(N \bmod 2), 0} \end{aligned} \quad (4.8)$$

gdje je δ Kronekerov simbol jer zadnji član ne postoji u slučaju neparnog N . Svi navedeni produkti imaju članove koji su manji ili jednaki od 1, pa je očekivano da će $\text{Re}\{r(t)\} \rightarrow 0$ za $N \rightarrow \infty$. Isto se može vidjeti i na numeričkom izračunu (slika 4.1). Može se zaključiti da kada okolina ima velike stupnjeve slobode, dekoherencija je praktično ireverzibilna.



Slika 4.1: Realni dio faktora dekoherencije u ovisnosti o vremenu t i broju mjernih uređaja N . Parametri g_i i α_i generirani su nasumično iz skupa $[0, 1]$. Već za $N = 50$ faktor dekoherencije nakon kratkog vremena teži nuli. Nacrtano uz program `factor.py` (Dodatak C).

4.2 Superselekcija uzrokovana okolinom

Korištenje von Neumannovog programa dovelo je do posljedice da baza sustava nije uvijek jedinstveno određena (*problem preferirane baze*, jednadžba 3.5), odnosno da mjerni uređaj može dati rezultat u bilo kojoj bazi, čime se dokida njegov smisao jer ne može mjeriti samo određene observable za koje je dizajniran, već sve. Postavlja se stoga pitanje može li okolina kroz dekoherenciju zapisati neka druga stanja svojstvena drugim bazama koja nisu nužno lokalizirana u prostoru. Ako ne može, to bi značilo da postoji samo određena baza koju određuje dekoherencija čime bi problem preferirane baze bio riješen, a mjerni uređaji tek zajedno s okolinom mjerili bi observable za koje su napravljeni.

Stanja $|\psi_1\rangle$ i $|\psi_2\rangle$ u (4.1) koreliraju sa stanjima okoline $|E_1\rangle$ i $|E_2\rangle$. Ako se uvede nova baza

$$|\psi_{\pm}\rangle \equiv (|\psi_1\rangle \pm |\psi_2\rangle) \quad (4.9)$$

stanja $|\psi_-\rangle$ i $|\psi_+\rangle$ predstavljaju klasično nelokalizirana stanja. Da bi ih okolina razlikovala, mora biti u mogućnosti zapisati njihovu informaciju o položaju. Prilikom međudjelovanja takvog stanja s okolinom, konačan rezultat isprepleteno je stanje:

$$|\psi_{\pm}\rangle|E_0\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_1\rangle|E_1\rangle \pm |\psi_2\rangle|E_2\rangle) . \quad (4.10)$$

Prema uzoru na primjer s mjernim uređajem iz potpoglavlja 3.2, razlika stanja $|\psi_+\rangle$ i $|\psi_-\rangle$ zapisana je u obliku reduciranih matrica gustoće, gdje je operacija traga ovaj put provedena nad sustavom $|\psi_{\pm}\rangle$ jer je okolina ono što je ovdje bitno:

$$\begin{aligned} \rho_{\pm} &= \frac{1}{2} (|E_1\rangle\langle E_1| + |E_2\rangle\langle E_2| \pm |E_1\rangle\langle E_2|\langle\psi_2|\psi_1\rangle \pm |E_2\rangle\langle E_1|\langle\psi_2|\psi_1\rangle) \\ &= \frac{1}{2} (|E_1\rangle\langle E_1| + |E_2\rangle\langle E_2|) \\ \Rightarrow \rho_+ &= \rho_- . \end{aligned} \quad (4.11)$$

Iz toga slijedi da okolina u bazi $\{|E_1\rangle, |E_2\rangle\}$ ne može odrediti u kojem se od dva stanja $|\psi_+\rangle$ i $|\psi_-\rangle$ sustav nalazi. Okolina je posve neosjetljiva na novouvedenu bazu (4.9) kao i na sve druge baze koje daju isprepleteno stanje:

$$|\psi'_{\pm}\rangle|E_0\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi'_1\rangle|E'_1\rangle \pm |\psi'_2\rangle|E'_2\rangle) . \quad (4.12)$$

Ako bi se u obzir uzela superpozicija stanja $|\psi\rangle = (|\psi_+\rangle + |\psi_-\rangle)/\sqrt{2}$ ispada da se okolina s tim stanjem ne bi ni ispreplela:

$$|\psi\rangle|E_0\rangle \rightarrow |\psi\rangle|E_1\rangle . \quad (4.13)$$

U tom slučaju okolina neće zapisati koherentne članove iz interferencije između $|\psi_+\rangle$ i $|\psi_-\rangle$. To je posve obrnuto u usporedi sa stanjima $|\psi_{1,2}\rangle$ koja sama ostaju neisprepletene, a sve njihove linearne kombinacije brzo ulaze u korelaciju s okolinom.

Zato neka stanja nisu podložna dekoherenčiji, odnosno postoje tzv. *preferirana stanja*² sustava koja su najotpornija na utjecaj dekoherenčije [14]. Ta su stanja ujedno i najmanje isprepletene s okolinom. Takav izbor preferiranih stanja naziva se *superselekcija uzrokovana okolinom*

²U literaturi još i "pokazivačka stanja" (eng. *pointer states*).

(eng. *environment-induced superselection*) i ona proizlazi dinamički pri međudjelovanju s okolinom. Ova posljedica dekoherencije objašnjava zašto neka stanja Schrödingerove mačke kao $(|\text{živa}\rangle + |\text{mrtva}\rangle)$ nije moguće opaziti u makrosvijetu, što je rješenje problema preferirane baze postavljenog u poglavlju 3.

U kontekstu mernog uređaja, uređaj "uronjen" u okolinu više ne može uspostaviti bilo kakvu korelaciju s promatranim sustavom (3.3), već dekoherencija odabire samo određena, najrobustnija stanja ("pokazivačka stanja"). I zato je određeni uređaj dizajniran da mjeri samo određene veličine promatranog sustava, a ne bilo koje.

Ostaje odrediti koja su to točno preferirana stanja, a time i observable predodređene dekoherencijom. To određenje ovisi o dominantnom dijelu hamiltonijana koji opisuje dinamiku sustava i njegovo međudjelovanje s okolinom. U tom kontekstu nameću se dvije granice [14]: jedna u kojoj međudjelovanje dominira u ukupnom hamiltonijanu (tzv. kvantna granica mjerenja) i druga u kojoj je hamiltonian sustava prevladavajući član ukupnog hamiltonijana (tzv. kvantna granica dekoherencije).

4.2.1 Preferirana stanja u kvantnoj granici mjerenja

Uvezši da je mjerenje opisano samo hamiltonijanom međudjelovanja $\hat{H} \approx \hat{H}_{\text{int}}$ jer su druge komponente hamiltonijana zanemarive u odnosu na \hat{H}_{int} , moguće je iz hamiltonijana međudjelovanja odrediti preferirana stanja [23].

Traži se preferirana baza $\{|s_i\rangle\}$ takva da je zadovoljeno:

$$e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}|s_i\rangle|E_0\rangle = \lambda_i|s_i\rangle e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}|E_0\rangle \equiv |s_i\rangle|E_i(t)\rangle \quad (4.14)$$

iz čega proizlazi zahtjev da stanja $|s_i\rangle$ moraju biti svojstvena stanja hamiltonijana \hat{H}_{int} . To znači da je observable operator koji može biti samo linearna kombinacija projektora $|s_i\rangle\langle s_i|$, tzv. *pokazivačka observable*:

$$\hat{O}_S = \sum_i o_i |s_i\rangle\langle s_i|. \quad (4.15)$$

Budući da su $|s_i\rangle$ vlastita stanja hamiltonijana, time je ujedno zadovoljen i uvjet da \hat{O}_S komutira

s hamiltonijanom međudjelovanja:

$$\left[\hat{O}_S, \hat{H}_{\text{int}} \right] = 0 . \quad (4.16)$$

Ovaj uvjet naziva se *kriterij komutativnosti*. Preferirana stanja mogu se dakle pronaći kao svojstvena stanja hamiltonijana međudjelovanja, a pripadajuća pokazivačka opservabla je ona koja komutira s tim istim hamiltonijanom.

Uz ovo znanje moguće je pronaći potprostore u kojima ne djeluje dekoherencija (eng. *decoherence-free subspaces*) (DFS), odnosno one u kojima su sva stanja imuna na dekoherenciju. DFS je preduvjet za održavanje kvantnih sustava, pa tako i izgradnju kvantnih računala kod kojih je dekoherencija glavni uzrok pogrešaka [24, pog. 7, 8 i 10], odnosno može se slobodno ustvrditi da je “dekoherencija neprijatelj broj jedan kvantnih računala” [14, pog. 7].

4.2.2 Preferirana stanja u kvantnoj granici dekoherencije

U obrnutoj situaciji od prethodne, kad je hamiltonian međudjelovanja zanemariv u odnosu na vlastiti hamiltonian sustava, sustav odabire stanja koja su svojstvena stanja energije hamiltonijana sustava, što je uvelike poznato iz uvodnih udžbenika kvantne mehanike u kojima se primarno proučavaju izolirani sustavi. Na kvantitativnoj osnovi može se ustvrditi da se ovaj slučaj ostvaruje kad su intrinzične frekvencije (energije) slobodnog sustava puno veće od frekvencija (energija) prisutnih u okolini [19]. Okolina će tada moći samo zapisivati veličine koje su konstante gibanja tog sustava, a u slučaju nedegeneriranog sustava, to je upravo energija.

Sumirano, preferirana stanja u granici dekoherencije (kad je utjecaj okoline na sustav malen) odabiru se iz svojstvenih vrijednosti hamiltonijana samog sustava, a u granici mjerena (kad međudjelovanje dominira), svojstvenim stanjima hamiltonijana međudjelovanja između sustava i okoline. Između ove dvije granice, kad su oba hamiltonijana podjednako prisutna, preferirana stanja proizlaze kao kompromis između navedenih dvaju graničnih slučajeva.

Hamiltonian međudjelovanja između sustava i okoline često se opisuje procesom raspršenja. S obzirom da ti procesi u pravilu ovise o udaljenosti (Coulombov i Newtonov zakon gravitacije $\propto r^{-1}$), hamiltonian međudjelovanja obično komutira s položajem, pa je baza položaja

preferirana baza. To objašnjava zašto je u ljudskom iskustvu mezoskopskih i markoskopskih skala preferiran upravo položaj, odnosno preferirana su prostorno lokalizirana stanja [23]. Pojava "klasičnosti" u makrosvijetu može se iz toga pripisati dekoherenciji. Takav pristup može biti naročito zadovoljavajuć jer proizlazi isključivo iz formalizma kvantne mehanike. Preferiranje lokaliziranih stanja prilikom procesa raspršenja bit će tema upravo sljedećeg poglavљa.

5 | Lokalizacija uzrokovana raspršenjem čestica okoline

Dekoherenca razrješava neke konceptualne probleme, no potrebna je i eksperimentalna potvrda konkretnih modela da bi se nametnula kao kanonski dio kvantne mehanike. Konkretni se modeli mogu pronaći koristeći argumentaciju iznesenu u prethodnom poglavlju, a dobar je primjer lokalizacija¹ makroskopskih objekata kao posljedice termalnog zračenja i raspršenja na česticama okoline (npr. čestice zraka, fotoni, neutrini). Ovaj model gdje se makroskopski objekt sudara s mikroskopskim česticama podsjeća na klasično Brownovo gibanje poznato još prije vremena kvantne mehanike, pa nije ni čudno da se u literaturi često pojavljuje pod nazivom *kvantno Brownovo gibanje*. U slučaju da je prilikom sudara odboj makroskopskog objekta zanemaren, govori se o lokalizaciji putem idealnog mjerjenja² [13, pog. 3.2.1].

Bitno je primijetiti da je svako međudjelovanje u procesu dekoherenčije relevantno, pa malak na energetskoj skali bilo zanemarivo. To je ujedno i suštinska razlika u odnosu na klasičnu fiziku u kojoj, ako se govori npr. o biljarskim kuglama, međudjelovanje s molekulama zraka i fotonima može se slobodno zanemariti jer gotovo uopće ne doprinosi dinamici klasičnog sustava. U slučaju razmatranja biljarskih kugli s kvantnog stajališta, također se raspršenje može uzeti kao ono bez odboja (eng. *recoil-free*), kao što će biti prikazano u nastavku ovog poglavlja, ali je efekt kvantne ispreprepletenosti s raspršenim česticama neizbjegjan.

¹Pod pojmom lokalizacije misli se na proces gubitka koherentnih članova između prostorno odvojenih stanja kvantnog sustava.

²Negdje lokalizacija putem idealnog mjerjenja i dalje nosi naziv kvantno Brownovo gibanje, ali uz naznaku da se radi o masivnoj čestici, npr. [25].

Prvi razrađeni model lokalizacije uzrokovane raspršenjem i numeričke rezultate dali su Joos i Zeh [26], a kasnije su napravljeni elegantniji izvodi u kojima je dobivena i točnija normalizacija koja se od originalnog rezultata razlikuje za faktor 2π (npr. [27, 28, 29]), što je čak i eksperimentalno verificirano [20]. U kontekstu takvih sve preciznijih eksperimentalnih mjeranja u kojima eksperiment uočava kvantitativnu razliku od 2π , dobro je proučiti cijeli izvod i ispitati korištene pretpostavke i aproksimacije.

U ovom će poglavlju prvenstveno biti ispitana opravdanost standardno korištene aproksimacije koja dovodi do podjele računa na dva režima: kratkovalni, gdje je raspršenje u potpunosti odredilo informaciju o putanji (npr. raspršenje čestica zraka) i dugovalni, gdje je informacija o putanji samo djelomično određena jer je valna duljina raspršene čestice veća od prostorno odvojenih koherentnih stanja (npr. raspršenje fotona niskih energija). Područje između ova dva režima ostaje teorijski nepokriveno, a konkretno se tiče raspršenja fotona viših energija kod kojih dugovalna aproksimacija nije više opravdana. Pritom treba naglasiti da je kratkovalni režim puno dostupniji eksperimentalnoj provjeri pomoću molekulske interferometrije [20] nego dugovalni [30], a kojega se ovdje proučavana aproksimacija više dotiče. Stoga rezultate ovog poglavlja nije moguće usporediti s rezultatima eksperimenta sve dok eksperimentalne metode ne napreduju dovoljno da premoste tehničke poteškoće preciznog mjerjenja dugovalnog režima.

5.1 Model raspršenja

Početni je korak u izvodu modela ispitati raspršenje samo jedne čestice, što je dobro poznat postupak u teoriji raspršenja preko formalizma S-matrice [31, pog. 2, 3]. Ovaj dio izvoda prati one izvedene u [29, 14] gdje je dobivena točnija normalizacija i gdje je korištена pretpostavka raspršenja bez odboja čime ovo razmatranje spada u idealno mjerjenje kao što je napomenuto već u uvodu poglavlja.

Formalno, efekt jednog raspršenja čestice okoline i sustava \mathcal{S} može se zapisati na sljedeći način:

$$|\mathbf{x}\rangle|\chi_i\rangle \longrightarrow \hat{S}|\mathbf{x}\rangle|\chi_i\rangle \quad (5.1)$$

gdje je početno stanje sustava određeno njegovim centrom mase \mathbf{x} i označeno stanjem $|\mathbf{x}\rangle$ dok je početno stanje upadne čestice okoline označeno s $|\chi_i\rangle$. Pretpostavljeno je kao i uvijek do sada da su oba stanja u početnom trenutku međusobno neovisna, odnosno separabilna.

Najvažnija pretpostavka koja uvelike olakšava račun, ali koja se mora naglasiti jer bitno utječe na primjenu ovog izvoda, jest da se objekt od interesa (sustav \mathcal{S}) ne odbija prilikom raspršenja, odnosno da se stanje $|\mathbf{x}\rangle$ nije promijenilo³. Ta pretpostavka tim više vrijedi što je masa objekta veća od mase raspršene čestice.

Simbolički zapisano, to znači da je moguće pronaći S-matricu \hat{S}_0 u centru raspršenja koja kad se centar raspršenja translatira uz pomoć operatora impulsa \mathbf{p} u ishodište ($|\mathbf{0}\rangle = e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}/\hbar}|\mathbf{x}\rangle$), ostavlja stanje $|\mathbf{0}\rangle$ nepromijenjeno: $\hat{S}_0|\mathbf{0}\rangle|\chi_i\rangle = |\mathbf{0}\rangle\hat{S}_0|\chi_i\rangle$.

U slučaju proizvoljnog položaja stanja $|\mathbf{x}\rangle$:

$$\hat{S}|\mathbf{x}\rangle|\chi_i\rangle = \hat{S}e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}/\hbar}|\mathbf{0}\rangle|\chi_i\rangle \quad (5.2)$$

potrebno je uvesti impuls ukupnog sustava \mathcal{SE} označenog s $\mathbf{p} + \mathbf{q}$, gdje je \mathbf{q} impuls raspršene čestice jer se tako uz plauzibilnu pretpostavku da je raspršenje invarijantno na prostornu translaciju ukupnog sustava, odnosno $[\hat{S}, \mathbf{p} + \mathbf{q}] = 0$, može zaobići prvi eksponent:

$$\begin{aligned} \hat{S}|\mathbf{x}\rangle|\chi_i\rangle &= \hat{S}e^{-i(\mathbf{p}+\mathbf{q})\cdot\mathbf{x}/\hbar}e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}/\hbar}|\mathbf{0}\rangle|\chi_i\rangle \\ &= e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}/\hbar}e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}/\hbar}\hat{S}|\mathbf{0}\rangle e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}/\hbar}|\chi_i\rangle \\ &= e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}/\hbar}|\mathbf{0}\rangle e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}/\hbar}\hat{S}_0 e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}/\hbar}|\chi_i\rangle \\ &= |\mathbf{x}\rangle\hat{S}_{\mathbf{x}}|\chi_i\rangle \end{aligned} \quad (5.3)$$

gdje oznaka $\hat{S}_{\mathbf{x}} = e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}/\hbar}\hat{S}_0 e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}/\hbar}$ opisuje raspršenje sa središtem u \mathbf{x} .

Time se informacija o raspršenju i položaju sustava \mathcal{S} spremila samo u stanje raspršene čestice:

$$|\mathbf{x}\rangle|\chi_i\rangle \longrightarrow |\mathbf{x}\rangle\hat{S}_{\mathbf{x}}|\chi_i\rangle \equiv |\mathbf{x}\rangle|\chi(\mathbf{x})\rangle. \quad (5.4)$$

³Općenitiji izvod koji uzima u obzir i odbor objekta napravljen je u [27], no takva analiza zahtijeva formalizam master jednadžbi, čije bi uvođenje ovdje predstavljalo veliki diskontinuitet u izlaganju i zato se ovdje neće obraditi. Kao što je već navedeno, ovaj općenitiji model u literaturi može se pronaći pod nazivom kvantno Brownovo gibanje, npr. [14, pog. 5].

Da bi se dobila evolucija matrice gustoće sustava \mathcal{S} , potrebno je sve prepisati u matrice gustoće te okolinu izdvojiti operacijom traga:

$$\begin{aligned}\hat{\rho}(0) &= \hat{\rho}_{\mathcal{S}}(0) \otimes \hat{\rho}_{\mathcal{E}}(0) = \int d\mathbf{x} \int d\mathbf{x}' \rho_{\mathcal{S}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', 0) |\mathbf{x}\rangle\langle\mathbf{x}'| \otimes |\chi_i\rangle\langle\chi_i| \\ &\longrightarrow \hat{\rho} = \int d\mathbf{x} \int d\mathbf{x}' \rho_{\mathcal{S}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', 0) |\mathbf{x}\rangle\langle\mathbf{x}'| \otimes |\chi(\mathbf{x})\rangle\langle\chi(\mathbf{x}')|\end{aligned}\quad (5.5)$$

$$\hat{\rho}_{\mathcal{S}} = \text{Tr}_{\mathcal{E}} \hat{\rho} = \int d\mathbf{x}' \rho_{\mathcal{S}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', 0) |\mathbf{x}\rangle\langle\mathbf{x}'| \otimes \langle\chi(\mathbf{x}')|\chi(\mathbf{x})\rangle. \quad (5.6)$$

Kao u poglavlju 3, koristit će se reprezentacija u bazi položaja:

$$\rho_{\mathcal{S}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', 0) \rightarrow \rho_{\mathcal{S}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', 0) \langle\chi(\mathbf{x}')|\chi(\mathbf{x})\rangle. \quad (5.7)$$

Prostorna koherencija sustava \mathcal{S} ovisi o preklapanju stanja $\langle\chi(\mathbf{x}')|\chi(\mathbf{x})\rangle$:

$$\begin{aligned}\langle\chi(\mathbf{x}')|\chi(\mathbf{x})\rangle &= \langle\chi|\hat{S}_{\mathbf{x}'}^{\dagger} \hat{S}_{\mathbf{x}}|\chi\rangle \\ &= \text{Tr}_{\mathcal{E}} \left\{ \hat{\rho}_{\mathcal{E}}(0) \hat{S}_{\mathbf{x}'}^{\dagger} \hat{S}_{\mathbf{x}} \right\}.\end{aligned}\quad (5.8)$$

Početnu matricu gustoće $\hat{\rho}_{\mathcal{E}}(0)$ moguće je razviti u ortonormiranoj bazi

$$\hat{\rho}_{\mathcal{E}}(0) = \frac{(2\pi\hbar)^3}{V} \sum_{\mathbf{q} \in Q_V} \mu(\mathbf{q}) |\tilde{\mathbf{q}}\rangle\langle\tilde{\mathbf{q}}| \quad (5.9)$$

gdje je $|\tilde{\mathbf{q}}\rangle$ svojstveno stanje impulsa raspršene čestice normalizirano⁴ u kutiji volumena V :

$$|\tilde{\mathbf{q}}\rangle = \left[\frac{(2\pi\hbar)^3}{V} \right]^{1/2} |\mathbf{q}\rangle, \quad \sum_{\mathbf{q} \in Q_V} |\tilde{\mathbf{q}}\rangle\langle\tilde{\mathbf{q}}| = \hat{I}_V \quad (5.10)$$

što dovodi do

$$\begin{aligned}\langle\chi(\mathbf{x}')|\chi(\mathbf{x})\rangle &= \frac{(2\pi\hbar)^3}{V} \sum_{\mathbf{q} \in Q_V} \mu(\mathbf{q}) \langle\tilde{\mathbf{q}}|\hat{S}_{\mathbf{x}'}^{\dagger} \hat{S}_{\mathbf{x}}|\tilde{\mathbf{q}}\rangle \\ &= \frac{(2\pi\hbar)^3}{V} \sum_{\mathbf{q} \in Q_V} \mu(\mathbf{q}) \langle\tilde{\mathbf{q}}|e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}'/\hbar} \hat{S}^{\dagger} e^{-i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')/\hbar} \hat{S} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}/\hbar} |\tilde{\mathbf{q}}\rangle.\end{aligned}\quad (5.11)$$

⁴Normaliziranje stanja unutar arbitrarne kutije volumena $V \rightarrow \infty$ uobičajeni je postupak u teoriji raspršenja da bi se dijelom izbjegao račun s (u početku prepostavljenim) nenormalizabilnim stanjima slobodne čestice.

Ova promjena baze napravljena je radi sljedećeg koraka:

$$\begin{aligned}
\langle \chi(\mathbf{x}') | \chi(\mathbf{x}) \rangle &= \frac{(2\pi\hbar)^3}{V} \sum_{\mathbf{q} \in Q_V} \mu(\mathbf{q}) e^{-i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{x}' - \mathbf{x})/\hbar} \langle \tilde{\mathbf{q}} | \hat{S}^\dagger e^{-i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')/\hbar} \hat{S} | \tilde{\mathbf{q}} \rangle \\
&= \frac{(2\pi\hbar)^3}{V} \sum_{\mathbf{q} \in Q_V} \mu(\mathbf{q}) e^{-i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{x}' - \mathbf{x})/\hbar} \langle \tilde{\mathbf{q}} | \left(\hat{I} - i\hat{T}^\dagger \right) e^{-i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')/\hbar} \left(\hat{I} + i\hat{T} \right) | \tilde{\mathbf{q}} \rangle \\
&= \frac{(2\pi\hbar)^3}{V} \sum_{\mathbf{q} \in Q_V} \mu(\mathbf{q}) e^{-i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{x}' - \mathbf{x})/\hbar} \times \\
&\quad \langle \tilde{\mathbf{q}} | \left[e^{-i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')/\hbar} - i\hat{T}^\dagger e^{-i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')/\hbar} + e^{-i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')/\hbar} i\hat{T} - i\hat{T}^\dagger e^{-i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')/\hbar} i\hat{T} \right] | \tilde{\mathbf{q}} \rangle \\
&= \frac{(2\pi\hbar)^3}{V} \sum_{\mathbf{q} \in Q_V} \mu(\mathbf{q}) e^{-i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{x}' - \mathbf{x})/\hbar} \left[e^{-i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')/\hbar} \right. \\
&\quad \left. - ie^{-i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')/\hbar} \langle \tilde{\mathbf{q}} | \hat{T}^\dagger | \tilde{\mathbf{q}} \rangle + ie^{-i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')/\hbar} \langle \tilde{\mathbf{q}} | \hat{T} | \tilde{\mathbf{q}} \rangle - \langle \tilde{\mathbf{q}} | i\hat{T}^\dagger e^{-i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')/\hbar} i\hat{T} | \tilde{\mathbf{q}} \rangle \right] \\
&= \frac{(2\pi\hbar)^3}{V} \sum_{\mathbf{q} \in Q_V} \mu(\mathbf{q}) \left[1 - \langle \tilde{\mathbf{q}} | i \left(\hat{T}^\dagger - \hat{T} \right) | \tilde{\mathbf{q}} \rangle + e^{i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')/\hbar} \langle \tilde{\mathbf{q}} | \hat{T}^\dagger e^{-i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')/\hbar} \hat{T} | \tilde{\mathbf{q}} \rangle \right] \\
&= \frac{(2\pi\hbar)^3}{V} \sum_{\mathbf{q} \in Q_V} \mu(\mathbf{q}) \left[1 - \langle \tilde{\mathbf{q}} | \hat{T} \hat{T}^\dagger | \tilde{\mathbf{q}} \rangle + e^{i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')/\hbar} \langle \tilde{\mathbf{q}} | \hat{T}^\dagger e^{-i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')/\hbar} \hat{T} | \tilde{\mathbf{q}} \rangle \right]
\end{aligned} \tag{5.12}$$

tako što je u prvom redu operator impulsa zamijenila njegova svojstvena vrijednost jer je $|\tilde{\mathbf{q}}\rangle$ baš definirano svojstveno stanje tog operatora, a u drugom redu je napravljena supstitucija $\hat{S} = \hat{I} + i\hat{T}$. Ova supstitucija zapravo reprezentira poopćeni pristup u teoriji raspršenja gdje je raspršeni val jednak zbroju upadnog i raspršenog sfernog vala, a iz matrice T tada se može uspostaviti veza s amplitudom raspršenja [31, pog. 2, 3]. Iz svojstva matrice T :

$$\hat{S}\hat{S}^\dagger = \hat{I} = \left(\hat{I} + i\hat{T} \right) \left(\hat{I} - i\hat{T}^\dagger \right) \Rightarrow \hat{T}\hat{T}^\dagger + i \left(\hat{T} - \hat{T}^\dagger \right) = 0 \tag{5.13}$$

dobiven je zadnji red gornjeg raspisa.

Ubacivanjem jedinice kao potpunog skupa ortonormirane baze $\sum_{\mathbf{q}' \in Q_V} |\tilde{\mathbf{q}}'\rangle \langle \tilde{\mathbf{q}}'| = \hat{I}_V$ zadnji

rezultat može se zapisati jednostavnije:

$$\begin{aligned}
 \langle \chi(\mathbf{x}') | \chi(\mathbf{x}) \rangle &= \frac{(2\pi\hbar)^3}{V} \sum_{\mathbf{q} \in Q_V} \mu(\mathbf{q}) \left[1 - \langle \tilde{\mathbf{q}} | \hat{T} \left(\sum_{\mathbf{q}' \in Q_V} |\tilde{\mathbf{q}'}\rangle \langle \tilde{\mathbf{q}'}| \right) \hat{T}^\dagger | \tilde{\mathbf{q}} \rangle + \right. \\
 &\quad \left. e^{i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{x}')/\hbar} \langle \tilde{\mathbf{q}} | \hat{T}^\dagger \left(\sum_{\mathbf{q}' \in Q_V} |\tilde{\mathbf{q}'}\rangle \langle \tilde{\mathbf{q}'}| \right) e^{-i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{x}')/\hbar} \hat{T} | \tilde{\mathbf{q}} \rangle \right] \\
 &= \frac{(2\pi\hbar)^3}{V} \sum_{\mathbf{q} \in Q_V} \mu(\mathbf{q}) \left[1 - \sum_{\mathbf{q}' \in Q_V} \left| \langle \tilde{\mathbf{q}} | \hat{T} | \tilde{\mathbf{q}'} \rangle \right|^2 + e^{i(\mathbf{q}-\mathbf{q}') \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{x}')/\hbar} \left| \langle \tilde{\mathbf{q}} | \hat{T} | \tilde{\mathbf{q}'} \rangle \right|^2 \right] \\
 &= \frac{(2\pi\hbar)^3}{V} \sum_{\mathbf{q} \in Q_V} \mu(\mathbf{q}) \left[1 - \sum_{\mathbf{q}' \in Q_V} \left(1 - e^{i(\mathbf{q}-\mathbf{q}') \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{x}')/\hbar} \right) \left| \langle \tilde{\mathbf{q}} | \hat{T} | \tilde{\mathbf{q}'} \rangle \right|^2 \right] \quad (5.14)
 \end{aligned}$$

što pri prijelazu u kontinuirani limes stanja impulsa $(2\pi\hbar)^3/V \sum_{\mathbf{q}} \rightarrow \int d\mathbf{q}$ i iskorištavanjem $\int d\mathbf{q} \mu(\mathbf{q})$ dovodi do oblika

$$\langle \chi(\mathbf{x}') | \chi(\mathbf{x}) \rangle = 1 - \int d\mathbf{q} \mu(\mathbf{q}) \frac{(2\pi\hbar)^3}{V} \int d\mathbf{q}' \left(1 - e^{i(\mathbf{q}-\mathbf{q}') \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{x}')/\hbar} \right) \left| \langle \mathbf{q} | \hat{T} | \mathbf{q}' \rangle \right|^2 \quad (5.15)$$

gdje je faktor $\frac{(2\pi\hbar)^3}{V}$ došao zbog povratka nazad u bazu $|\mathbf{q}\rangle$ (5.10).

Matrični element $\langle \mathbf{q} | \hat{T} | \mathbf{q}' \rangle$, kao što je već spomenuto, može se prikazati preko amplitude raspršenja [31, pog. 3]:

$$\langle \mathbf{q} | \hat{T} | \mathbf{q}' \rangle = \frac{i}{2\pi\hbar q} \delta(q - q') f(\mathbf{q}, \mathbf{q}') = \frac{i}{2\pi\hbar m} \delta(E - E') f(\mathbf{q}, \mathbf{q}') \quad (5.16)$$

a delta funkcija posljedica je pretpostavke o elastičnom sudaru, odnosno raspršena čestica mase m sačuvala je svoju energiju nakon raspršenja jer nije bilo odboja. Kvadriranje cijelog izraza predstavlja velik problem jer kvadrat delta funkcije u teoriji distribucija nije valjano definiran. Ovaj se problem može zaobići fizikalnom argumentacijom koja se svodi na rješavanje kvadrata delte koristeći Fourierovu reprezentaciju delte po uzoru na izvod Fermijevog zlatnog pravila [32, pog. 18.2]:

$$\begin{aligned}
 \delta^2(E - E') &= \delta(E - E') \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-T/2}^{T/2} dt e^{i(E-E')t/\hbar} \\
 &= \delta(E - E') \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-T/2}^{T/2} dt \\
 &= \delta(E - E') \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T}{2\pi\hbar}. \quad (5.17)
 \end{aligned}$$

Drugi je red posljedica uobičajenog postupka kod izvoda Fermijevog zlatnog pravila, ali s matematičkog stajališta neegzaktnog jer je uzeto da zbog prve delte argument eksponencijalne funkcije mora biti nula ili bi u suprotnom cijeli rezultat bio nula. Uvrštavanjem ovako zaobiđenog kvadrata delta funkcija slijedi:

$$\begin{aligned} |\langle \mathbf{q} | \hat{T} | \mathbf{q}' \rangle|^2 &= \frac{1}{(2\pi\hbar m)^2} \delta^2(E - E') |f(\mathbf{q}, \mathbf{q}')|^2 \\ &= \frac{1}{(2\pi\hbar m)^2} \delta(E - E') \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T}{2\pi\hbar} |f(\mathbf{q}, \mathbf{q}')|^2 \\ &= \frac{1}{(2\pi\hbar m)^2} \frac{m}{q} \delta(q - q') \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T}{2\pi\hbar} |f(\mathbf{q}, \mathbf{q}')|^2. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Vrijeme T tumači se kao vrijeme u kojem je međudjelovanje "uključeno", a ono je vrlo veliko u odnosu na sam događaj raspršenja. Problem je ove pretpostavke što postavlja uvjet na gornju granicu (najkraću) vremena dekoherenčije jer ako je skala procesa dekoherenčije približna ili čak kraća od vremena T , ovaj postupak postaje vrlo diskutabilan. Najsporiji eksperimentalno mjereni procesi raspršenja (oni s termalnim neutronima) procjenjuju vrijeme T na $\sim 10^{-10}$ s [31, pog. 2], što jest vrlo malo, ali u nekim slučajevima usporedivo sa skalom dekoherenčije. Ova je argumentacija prisutna u većini relevantnih članaka [33, 27, 29], međutim u [28] izvod je napravljen puno suptilnije, što je omogućilo i bolju argumentaciju. Hornberger i Sipe posebnu pozornost posvećuju zaobilasku kvadrata delta funkcije i dolaze do istog rezultata, ali pokazuju da je vrijeme T daleko manje od vremena koje valni paket mora prevaliti između razmaka dviju lokacija na kojima se događa dekoherenčija, što je sigurno zadovoljeno za okolinu koja nije suviše gusta česticama (granica niske gustoće).

Posljedica je ove argumentacije da unatoč tome što $T \rightarrow \infty$, u usporedbi s vremenskom skalom dekoherenčije limes se iz daljnog računa može izbaciti:

$$\langle \chi(\mathbf{x}') | \chi(\mathbf{x}) \rangle = 1 - \int d\mathbf{q} \mu(\mathbf{q}) \frac{1}{mq} \delta(q - q') \frac{T}{V} \int d\mathbf{q}' \left(1 - e^{i(\mathbf{q}-\mathbf{q}') \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{x}')/\hbar} \right) |f(\mathbf{q}, \mathbf{q}')|^2. \quad (5.19)$$

Delta funkcija čuva iznos impulsa, pa je $|\mathbf{q}| = |\mathbf{q}'|$, odnosno drugi integral može se svesti na integraciju po jediničnom vektoru prostornog kuta $d\mathbf{q}' = q^2 d\mathbf{n}'$, odnosno površini jedinične kugle u impulsnom prostoru:

$$\langle \chi(\mathbf{x}') | \chi(\mathbf{x}) \rangle = 1 - \int d\mathbf{q} \mu(\mathbf{q}) \frac{q}{m} \frac{T}{V} \int d\mathbf{n}' \left(1 - e^{i(\mathbf{q}-q\mathbf{n}') \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{x}')/\hbar} \right) |f(\mathbf{q}, q\mathbf{n}')|^2. \quad (5.20)$$

Umjesto q/m moguće je uvesti brzinu čestice $v(q) = q/m$ u slučaju masivne čestice ili $v(q) = c$ u slučaju fotona, dok prijelaz na mnoštvo raspršenja množenjem s N nezavisnih raspršenja i pretpostavljanjem da je raspodjela impulsa čestica izotropna omogućuje zamjenu impulsne raspodjele vjerojatnosti s gustoćom upadnih čestica iznosa impulsa q :

$$\mu(\mathbf{q}) \equiv \frac{1}{4\pi} \left(\frac{N}{V} \right)^{-1} \varrho(q) dq d\mathbf{n} \quad (5.21)$$

gdje je predfaktor izabran tako da $\int dq \varrho(q) = N/V$ što daje

$$\langle \chi(\mathbf{x}') | \chi(\mathbf{x}) \rangle = \\ 1 - N \frac{T}{V} \left(\frac{N}{V} \right)^{-1} \int dq \varrho(q) v(q) \int \frac{d\mathbf{n} d\mathbf{n}'}{4\pi} \left(1 - e^{i(\mathbf{q}-q\mathbf{n}') \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{x}')/\hbar} \right) |f(\mathbf{q}, q\mathbf{n}')|^2 \quad (5.22)$$

odnosno ako se sve uvrsti u (5.7), slijedi:

$$\begin{aligned} \rho_S(\mathbf{x}, \mathbf{x}', T) &= \rho_S(\mathbf{x}, \mathbf{x}', 0) \times \\ &\left[1 - T \int dq \varrho(q) v(q) \int \frac{d\mathbf{n} d\mathbf{n}'}{4\pi} \left(1 - e^{i(\mathbf{q}-q\mathbf{n}') \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{x}')/\hbar} \right) |f(\mathbf{q}, q\mathbf{n}')|^2 \right] \\ &\Rightarrow \\ \rho_S(\mathbf{x}, \mathbf{x}', T) - \rho_S(\mathbf{x}, \mathbf{x}', 0) &= -\rho_S(\mathbf{x}, \mathbf{x}', 0) \times \\ &T \int dq \varrho(q) v(q) \int \frac{d\mathbf{n} d\mathbf{n}'}{4\pi} \left(1 - e^{i(\mathbf{q}-q\mathbf{n}') \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{x}')/\hbar} \right) |f(\mathbf{q}, q\mathbf{n}')|^2. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Konačno, dijeljenjem cijelog izraza s T i svođenjem T -a u diferencijal dobiva se vremenska evolucija reducirane matrice gustoće:

$$\frac{\partial \rho_S(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t)}{\partial t} = -F(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \rho_S(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t) \quad (5.24)$$

pri čemu je s $F(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ definiran faktor dekoherencije:

$$F(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \equiv \int dq \varrho(q) v(q) \int \frac{d\mathbf{n} d\mathbf{n}'}{4\pi} \left(1 - e^{i(\mathbf{q}-q\mathbf{n}') \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{x}')/\hbar} \right) |f(\mathbf{q}, q\mathbf{n}')|^2. \quad (5.25)$$

Ovaj ključan rezultat koji opisuje kako okolina utječe na brzinu "nestajanja" prostorne koherencije između stanja $|\mathbf{x}\rangle$ i $|\mathbf{x}'\rangle$ obilježen je pretpostavkama da nema početne korelacije između čestica okoline i sustava \mathcal{S} , da je raspršenje invarijantno na translaciju cijelog sustava (homogenost), da nema preferiranja određenog smjera kod upadnih čestica (izotropnost), da se sustav \mathcal{S} ne odbija prilikom raspršenja te da je vrijeme raspršenja puno kraće od karakterističnog vremena evolucije sustava, što obuhvaća i vrijeme dekoherencije.

5.2 Faktor dekoherencije

U literaturi (npr. [26, 13, 14]) faktor dekoherencije izračunat je za granične vrijednosti, i to u dugovalnoj ($\lambda_0 \gg |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$) i kratkovalnoj ($\lambda_0 \ll |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$) granici. Ovdje će se pokušati napraviti cijeli izvod u zatvorenoj formi bez korištenja tih uobičajenih aproksimacija jer bi to omogućilo uvid u područja izvan tih granica, na primjer kad je valna duljina usporediva s razmakom između centara masa dvaju koherentnih stanja ($\lambda_0 \approx |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$).

$$1 - e^{iq(\hat{\mathbf{n}} - \hat{\mathbf{n}}')(\mathbf{x} - \mathbf{x}')/\hbar} = - \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N!} \left(\frac{iq}{\hbar} \right)^N [(\hat{\mathbf{n}} - \hat{\mathbf{n}}')(\mathbf{x} - \mathbf{x}')]^N \quad (5.26)$$

Pod integralom (5.25) nalazi se parna funkcija⁵ $|f(q\hat{\mathbf{n}}, q\hat{\mathbf{n}}')|^2$ pa slijedi da integral iščezava kad je drugi dio podintegralne funkcije neparan. Zato nije potrebno razmatrati članove s neparnom potencijom N – za njih je faktor dekoherencije uvijek nula.

Faktor dekoherencije s razvijenom eksponencionalnom funkcijom tada iznosi:

$$F(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \int d\mathbf{q} \varrho(q) v(q) \int \frac{d\hat{\mathbf{n}} d\hat{\mathbf{n}}'}{4\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-1}{(2k)!} \left(\frac{iq}{\hbar} \right)^{2k} [(\hat{\mathbf{n}} - \hat{\mathbf{n}}')(\mathbf{x} - \mathbf{x}')]^{2k} |f(q\hat{\mathbf{n}}, q\hat{\mathbf{n}}')|^2 \quad (5.27)$$

Nigdje nije prepostavljena konkretna orientacija sustava niti smjera upadnih čestica (već uvedena prepostavka izotropnosti), pa se gornji izraz može pojednostaviti tako da se usrednji

⁵Funkcija f predstavlja vjerojatnost prijelaza i mora biti parna jer za inverz u vremenu, odnosno kad izlazna čestica postaje ulazna, također mora davati istu vrijednost, tj. $f(q\hat{\mathbf{n}}, q\hat{\mathbf{n}}') = f^*(q\hat{\mathbf{n}}', q\hat{\mathbf{n}}) \Rightarrow |f(q\hat{\mathbf{n}}, q\hat{\mathbf{n}}')|^2 = |f(q\hat{\mathbf{n}}', q\hat{\mathbf{n}})|^2$.

po svim smjerovima ($\mathbf{x} - \mathbf{x}'$):

$$\left\langle [(\hat{\mathbf{n}} - \hat{\mathbf{n}}')(\mathbf{x} - \mathbf{x}')]^{2k} \right\rangle = (\hat{\mathbf{n}} - \hat{\mathbf{n}}')^{2k} (\mathbf{x} - \mathbf{x}')^{2k} \left\langle (|\hat{n}_\Delta| |\hat{x}_\Delta| \cos \vartheta)^{2k} \right\rangle \quad (5.28)$$

$$= (\hat{\mathbf{n}} - \hat{\mathbf{n}}')^{2k} (\mathbf{x} - \mathbf{x}')^{2k} \langle \cos^{2k} \vartheta \rangle \quad (5.29)$$

$$= (\hat{\mathbf{n}} - \hat{\mathbf{n}}')^{2k} (\mathbf{x} - \mathbf{x}')^{2k} \frac{\int \cos^{2k} \vartheta \sin \vartheta d\vartheta d\phi}{\int \sin \vartheta d\vartheta d\phi} \quad (5.30)$$

$$= (\hat{\mathbf{n}} - \hat{\mathbf{n}}')^{2k} (\mathbf{x} - \mathbf{x}')^{2k} \frac{2\pi}{4\pi} \int_0^\pi \cos^{2k} \vartheta \sin \vartheta d\vartheta \quad (5.31)$$

$$= \frac{1}{2k+1} (\hat{\mathbf{n}} - \hat{\mathbf{n}}')^{2k} (\mathbf{x} - \mathbf{x}')^{2k} \quad (5.32)$$

$$= \frac{2}{2k+1} (1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{n}}')^k (\mathbf{x} - \mathbf{x}')^{2k} \quad (5.33)$$

$$= \frac{2}{2k+1} (1 - \cos \theta)^k (\mathbf{x} - \mathbf{x}')^{2k} \quad (5.34)$$

U koraku (5.28) usrednjeno je napravljeno samo po jediničnim vektorima $\hat{n}_\Delta \equiv \frac{\hat{\mathbf{n}} - \hat{\mathbf{n}}'}{|\hat{\mathbf{n}} - \hat{\mathbf{n}}'|}$ i $\hat{x}_\Delta \equiv \frac{\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}}'}{|\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}}'|}$ jer usrednjeno ovisi samo o kutu među njima. U koraku (5.32) korišten je tablični integral [34]:

$$\int_0^\pi \sin \vartheta \cos^{2k} \vartheta d\vartheta = \frac{-1}{2k+1} [\cos^{2k+1} \pi - \cos^{2k+1} 0] = \frac{2}{2k+1}.$$

Kut θ u zadnjem koraku označava kut između upadne i izlazne putanje raspršene čestice, tj. kut između jediničnih vektora $\hat{\mathbf{n}}$ i $\hat{\mathbf{n}}'$.

Nakon usrednjjenja faktor dekoherencije svodi se na oblik:

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x} - \mathbf{x}') &= \int dq \varrho(q) v(q) \\ &\times \int \frac{d\hat{n} d\hat{n}'}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-(\mathbf{x} - \mathbf{x}')^{2k}}{(2k)!(2k+1)} \left(\frac{iq}{\hbar} \right)^{2k} (1 - \cos \theta)^k |f(q\hat{\mathbf{n}}, q\hat{\mathbf{n}}')|^2 \end{aligned} \quad (5.35)$$

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x} - \mathbf{x}') &= 4\pi \int dq \varrho(q) v(q) \\ &\times \int d\cos \theta \sum_{k=1}^{\infty} (\mathbf{x} - \mathbf{x}')^{2k} \left(\frac{q}{\hbar} \right)^{2k} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)!} (1 - \cos \theta)^k |f(q, \cos \theta)|^2 \end{aligned} \quad (5.36)$$

gdje je $|f(q\hat{\mathbf{n}}, q\hat{\mathbf{n}}')| = |f(q, \cos \theta)|$ u zadnjem redu zbog ranije navedene izotropnosti, a diferencijal se u zadnjem integralu promijenio na sljedeći način. Ako su svi kutevi slobodni, osim

razlike upadnog i izlaznog kuta $\theta = \theta_1 - \theta_2$, tada je integral po normama preveden u integral po kosinusu kuta:

$$\begin{aligned} \int d\hat{n}d\hat{n}' &= \int \sin\theta_1 \sin\theta_2 d\phi_1 d\phi_2 d\theta_1 d\theta_2 \\ &= 4\pi^2 \int \sin\theta_1 d\theta_1 \sin(\theta_1 - \theta_2) d(\theta_1 - \theta_2) \end{aligned} \quad (5.37)$$

$$= 8\pi^2 \int \sin(\theta_1 - \theta_2) d(\theta_1 - \theta_2) = 8\pi^2 \int d\cos\theta. \quad (5.38)$$

5.2.1 Granične vrijednosti

Dobiveni rezultat mora se slagati s graničnim vrijednostima koje su dobivene u literaturi. Za dugovalnu granicu vrijedi

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \ll \lambda_0 \Rightarrow \frac{\Delta x}{\lambda_0} \ll 1 \Rightarrow \frac{\Delta x q_0}{\hbar} \ll 1 \quad (5.39)$$

iz čega slijedi da samo prvi član sume ($k = 1$) značajno doprinosi faktoru dekoherenčije u odnosu na ostale članove te se tada jednadžba (5.36) jednostavno svodi na oblik

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x} - \mathbf{x}') &= (\mathbf{x} - \mathbf{x}')^2 \int dq \varrho(q) v(q) \left(\frac{q}{\hbar} \right)^2 \\ &\times \frac{2\pi}{3} \int (1 - \cos\theta) |f(q, \cos\theta)|^2 d\cos\theta \end{aligned} \quad (5.40)$$

što je identično kao (3.53) u [14]. Posebno u slučaju limesa $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \rightarrow 0 \Rightarrow F(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = 0$.

Da bi se dobila kratkovalna granica, red u (5.36) može se zapisati preko funkcije sinus:

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x} - \mathbf{x}') &= \int dq \varrho(q) v(q) 4\pi \int |f(q, \cos\theta)|^2 d\cos\theta \\ &\times \left[1 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \left(\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}') q \sqrt{1 - \cos\theta}}{\hbar} \right)^{2k} \right] \end{aligned} \quad (5.41)$$

$$\begin{aligned} &= \int dq \varrho(q) v(q) 4\pi \int |f(q, \cos\theta)|^2 d\cos\theta \\ &\times \left[1 - \frac{1}{z(\cos\theta)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z(\cos\theta)^{2k+1} \right] \end{aligned} \quad (5.42)$$

$$= \int dq \varrho(q) v(q) 4\pi \int |f(q, \cos\theta)|^2 d\cos\theta \left[1 - \frac{\sin(z(\cos\theta))}{z(\cos\theta)} \right] \quad (5.43)$$

gdje je

$$z(\cos \theta) = \frac{1}{\hbar} \left((\mathbf{x} - \mathbf{x}') q \sqrt{1 - \cos \theta} \right). \quad (5.44)$$

U kratkovalnoj granici tada vrijedi:

$$\lambda_0 \ll |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \Rightarrow \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{\lambda_0} \longrightarrow \infty \quad (5.45)$$

odnosno za $z(\cos \theta) \rightarrow \infty$:

$$\lim_{z(\cos \theta) \rightarrow \infty} \frac{\sin(z(\cos \theta))}{z(\cos \theta)} = 0. \quad (5.46)$$

pa je faktor dekoherencije

$$F(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \int dq \varrho(q) v(q) 4\pi \int d\cos \theta |f(q, \cos \theta)|^2. \quad (5.47)$$

Također i ova granica podudara se s onom iz literature gdje je odmah u (5.25) uzeta kratkovalna granica. U tom slučaju eksponencionalna funkcija u integralu zbog brzih oscilacija ne doprinosi integralu u odnosu na prvi (konstantni) član i tako se dobiva isti rezultat.

Kad je kut $\theta = 0$, faktor dekoherencije svodi se opet na oblik u kratkovalnoj granici, a to fizikalno reprezentira slučaj kad se čestica posve raspršila “unazad” (za $\theta = \pi$) i time potpuno odredila položaj objekta.

5.3 Lokalizacija uzrokovana raspršenjem fotona

Općenita formula faktora dekoherencije (5.36) može se primijeniti na slučaj raspršenja fotona specificirajući $\varrho(q)$, $v(q)$ i $|f(q\hat{\mathbf{n}}, q\hat{\mathbf{n}}')|^2$ što će dovesti do konkretnih rezultata.

Brzina je fotona c , a raspodjela je dana Planckovim zakonom:

$$\varrho(q) = \frac{1}{\pi^2 \hbar^3} \frac{q^2}{e^{cq/k_B T} - 1} \quad (5.48)$$

dok je relevantni diferencijalni udardni presjek u ovom slučaju dan sa Rayleighovim zakonom [35]:

$$|f(q\hat{\mathbf{n}}, q\hat{\mathbf{n}}')|^2 = \left(\frac{q}{\hbar}\right)^4 a^6 \left(\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2}\right)^2 \frac{1}{2} (1 + \cos^2 \theta) \quad (5.49)$$

gdje je a radijus objekta koji se modelira kao dielektrična sfera, a ϵ dielektrična konstanta koja ovdje ne ovisi o frekvenciji upadnog fotona.

Da bi se račun nastavio u koliko-toliko analitičkom smjeru, trenutni oblik formule (5.36) treba se presložiti tako da se zamjeni redoslijed beskonačne sume i integrala, no time završava mogućnost dalnjeg provođenja egzaktnog izvoda koji će vrijediti za cijelo područje parametara T i $(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$. Unutar formalizma Lebesgueove integracije za zamjenu integrala i limesa (u ovom slučaju reda) dovoljno je da je integral u limesu reda konačan [36, pog. 5]. U ovom je slučaju konvergenciju jednostavnije ispitati numerički, što će biti napravljeno na kraju ovog računa.

Nakon zamjene beskonačne sume i integrala, praktično je u formulu uvesti pokratu nazvanu efektivni udarni presjek po analogiji s totalnim udarnim presjekom, slijedeći pristup iz literature [14]:

$$\sigma_k^{\text{eff}}(q) \equiv \frac{4\pi}{(2k)!(2k+1)} \int d\cos\theta (1 - \cos\theta)^k |f(q, \cos\theta)|^2 . \quad (5.50)$$

Vremenska evolucija reducirane matrice gustoće sustava \mathcal{S} (5.7) ovime postaje:

$$\frac{\partial \rho_{\mathcal{S}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t)}{\partial t} = - \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_k (\mathbf{x} - \mathbf{x}')^{2k} \rho_{\mathcal{S}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t) \quad (5.51)$$

gdje su uvedene konstante raspršenja Λ_k :

$$\Lambda_k \equiv (-1)^{k+1} \int dq \varrho(q) v(q) \left(\frac{q}{\hbar}\right)^{2k} \sigma_k^{\text{eff}}(q) . \quad (5.52)$$

Ubacivanjem $|f(q\hat{\mathbf{n}}, q\hat{\mathbf{n}'})|^2$ u (5.50) dobiva se:

$$\sigma_k^{\text{eff}}(q) = \frac{4\pi}{(2k)!(2k+1)} \left(\frac{q}{\hbar}\right)^4 a^6 \left(\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2}\right)^2 \frac{1}{2} \int_{\pi}^0 (1 - \cos\theta)^k (1 + \cos^2\theta) d\cos\theta . \quad (5.53)$$

Integral u prethodnom izrazu može se riješiti parcijalnom integracijom:

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{\pi}^0 (1 - \cos \theta)^k (1 + \cos^2 \theta) d\cos \theta = \int_{-1}^1 (1 - u)^k (1 + u^2) du \\
 &= \int_{-1}^1 (1 - u)^k du + \int_{-1}^1 u^2 (1 - u)^k du \\
 &= \frac{2^{k+1}}{k+1} + u^2 \frac{-(1-u)^{k+1}}{k+1} \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 2u \frac{-(1-u)^{k+1}}{k+1} du \\
 &= \frac{2^{k+2}}{k+1} - 2u \frac{(1-u)^{k+2}}{(k+1)(k+2)} \Big|_{-1}^1 + \int_{-1}^1 2 \frac{(1-u)^{k+2}}{(k+1)(k+2)} du \\
 &= \frac{2^{k+2}}{k+1} - \frac{2^{k+3}}{(k+1)(k+2)} + \frac{2^{k+4}}{(k+1)(k+2)(k+3)} \\
 &= \frac{2^{k+2}(k^2 + 3k + 4)}{(k+1)(k+2)(k+3)}. \tag{5.54}
 \end{aligned}$$

Iz dobivenog efektivnog udarnog presjeka

$$\sigma_k^{\text{eff}}(q) = \frac{8\pi}{9} \left(\frac{q}{\hbar}\right)^4 a^6 \left(\frac{\epsilon-1}{\epsilon+2}\right)^2 \frac{9}{4} \frac{2^{k+2}(k^2 + 3k + 4)}{(2k+1)!(k+1)(k+2)(k+3)}. \tag{5.55}$$

mogu se izračunati i konstante raspršenja Λ_k ⁶:

$$\begin{aligned}
 \Lambda_k &= \frac{8\pi}{9} a^6 \left(\frac{\epsilon-1}{\epsilon+2}\right)^2 \frac{9}{4} \frac{(-1)^{k+1} 2^{k+2}(k^2 + 3k + 4)}{(2k+1)!(k+1)(k+2)(k+3)} \int dq \frac{1}{\pi^2 \hbar^3} \frac{q^2}{e^{cq/k_B T} - 1} c \left(\frac{q}{\hbar}\right)^{2(k+2)} \\
 &= \frac{8}{9\pi} a^6 c \left(\frac{\epsilon-1}{\epsilon+2}\right)^2 \frac{(-1)^{k+1}}{\hbar^{2(k+3)+1}} \frac{9}{4} \frac{2^{k+2}(k^2 + 3k + 4)}{(2k+1)!(k+1)(k+2)(k+3)} \int dq \frac{q^{2(k+3)+1-1}}{e^{cq/k_B T} - 1} \\
 &= \frac{8}{9\pi} a^6 c \left(\frac{\epsilon-1}{\epsilon+2}\right)^2 \left(\frac{k_B T}{\hbar c}\right)^{2k+7} \frac{9}{4} \frac{(-1)^{k+1} 2^{k+2}(2k+6)!(k^2 + 3k + 4)}{(2k+1)!(k+1)(k+2)(k+3)} \zeta(2k+7) \\
 &= \frac{8}{9\pi} a^6 c \left(\frac{\epsilon-1}{\epsilon+2}\right)^2 \left(\frac{k_B T}{\hbar c}\right)^{2k+7} \frac{9}{4} (-1)^{k+1} 2^{k+5} (2k+3)(2k+5)(k^2 + 3k + 4) \zeta(2k+7). \tag{5.56}
 \end{aligned}$$

Integral je u trećem redu zamijenjen Riemannovom ζ -funkcijom [34]:

$$\zeta(n) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^\infty dx \frac{x^{n-1}}{e^x - 1}. \tag{5.57}$$

Iz ovog izraza može se zaključiti da konstante raspršenja u apsolutnom iznosu rastu s k .

Stoga se postavlja pitanje u kojim je slučajevima valjano uzeti samo član $k = 1$. Da bi se dobila

⁶Negdje se Λ naziva i brzina lokalizacije (eng. *localization rate*) [33].

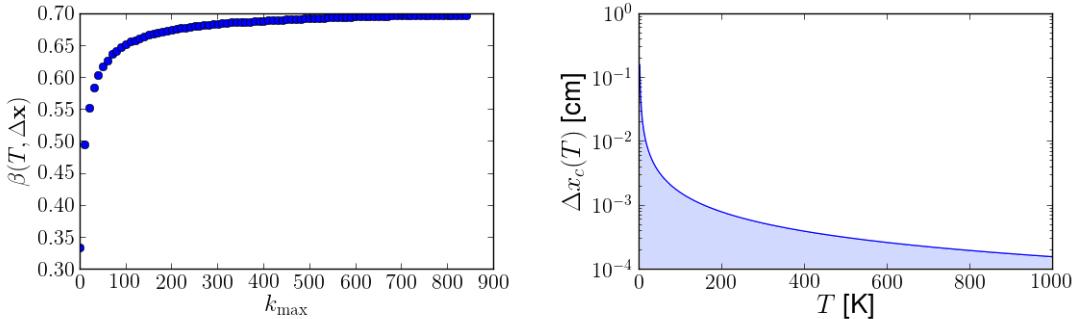
smislena kvantitativna usporedba, potrebno je uzeti u obzir razmak $(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ jer on u jednadžbi (5.51) ide s potencijom $2k$, a zajedno s konstantama raspršenja čini upravo vremensku skalu dekoherencije [14]:

$$\frac{1}{\tau_{\Delta x}} = \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_k (\mathbf{x} - \mathbf{x}')^{2k} = \alpha(T, a) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \beta(T, \Delta x)^{2k} 2^{k+5} (2k+3)(2k+5)(k^2+3k+4)\zeta(2k+7) \quad (5.58)$$

gdje su iskorištene pokrate

$$\alpha(T, a) = \left(\frac{k_B T}{\hbar c}\right)^7 \frac{2}{\pi} a^6 c \left(\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2}\right)^2 = \frac{2}{\pi} (4.3670378 \cdot T \text{ (cmK)}^{-1})^7 a^6 c \left(\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2}\right)^2 \quad (5.59)$$

$$\beta(T, \Delta x) = \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}') k_B T}{\hbar c} = 4.3670378 \Delta x T \text{ (cmK)}^{-1} \quad (5.60)$$

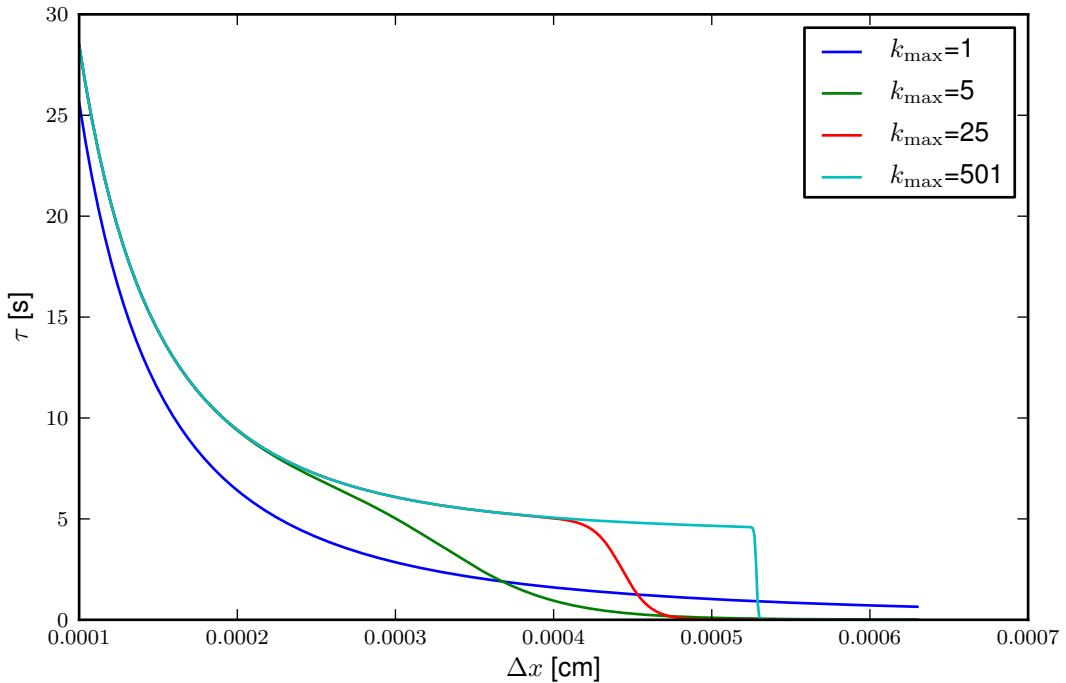


Slika 5.1: (a) Konvergencija reda (5.58) dobivena numeričkim računom tako da je suma računata do k_{\max} za svaki β dok nije počela divergirati, nakon čega je za dani k_{\max} ispisana zadnja stabilna β . k_{\max} je pomican u koracima po 10 sve do 840. Za veće k_{\max} račun više nije moguć unutar dvostrukog preciznosti (eng. *double float*) numeričkog paketa *python-mpmath*. (b) Područje parametara T i Δx za koje je formula (5.58) primjenjiva nalazi se ispod grafa funkcije.

Radius konvergencije reda (5.58) dobiven je numerički i on iznosi $\beta_c = 0.696(1)$ za $k_{\max} = 840$ (slika 5.1a), a taj se rezultat podudara i s kvalitativnom ocjenom prema kojoj redu najviše doprinose članovi s k u eksponentu, odnosno $(2\beta^2)^k < 1 \quad \forall k \Rightarrow \beta < 1/\sqrt{2} = 0.707\dots$. Pretvoreno u fizikalne veličine to znači da je na temperaturi od 300 K ovaj račun valjan do razmaka između centara masa dvaju koherentnih stanja $\Delta x_c = 0.00053 \text{ cm}$ (slika 5.1b). Za

veće dimenzije na istoj temperaturi više nije opravdano zamijeniti poredak integrala i reda u (5.36) jer će članovi reda divergirati.

5.4 Rezultati i diskusija

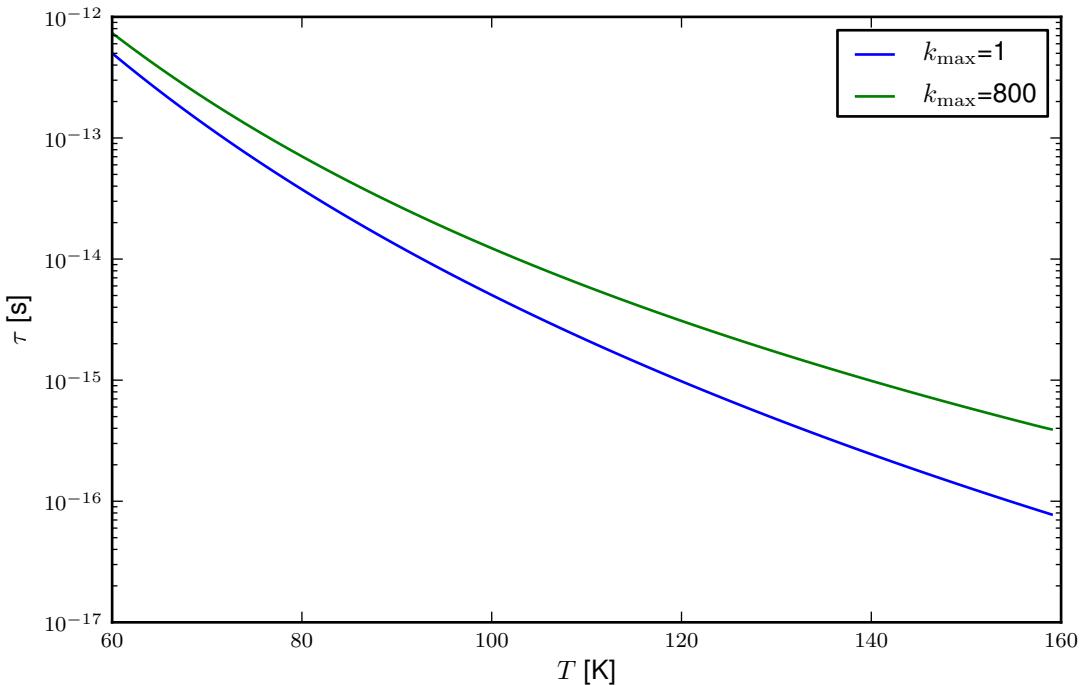


Slika 5.2: Vremenska skala dekoherenčije za različite k_{\max} u ovisnosti o Δx na $T = 300 \text{ K}$ ($a = 10^{-6} \text{ cm}$, $(\epsilon - 1)/(\epsilon - 2) = 1$). Za svaki k_{\max} , graf funkcije τ primjenjiv je do promjene pada funkcije gdje $\beta > \beta_c(k_{\max})$ pa viši članovi sume dominiraju, što dovodi do divergiranja cijele sume (npr. za $k_{\max} = 25$, $\tau(\Delta x)$ važeći je sve do 0.0004 cm).

Vremenska skala dekoherenčije u ovisnosti o Δx prikazana je na slici (5.2) za različite vrijednosti k_{\max} , pri čemu se vidi da za veće Δx postoji sve veće neslaganje između standardno aproksimiranog rješenja ($k_{\max} = 1$) i ovdje izračunate popravke ($k_{\max} > 1$). U granici malih Δx , odnosno u dugovalnoj granici, vremena se poklapaju jer su viši članovi reda tada zanemarivi. Ovaj je rezultat sasvim očekivan jer što je valna duljina fotona usporedljivija s razmakom

između koherentnih stanja, to je pretpostavka dugovalne granice manje opravdana.

Ovisnost vremenske skale o temperaturi puno je izraženija zbog sedme potencije u formuli (5.59) što se može vidjeti na slici 5.3. Porast temperature preko Planckove raspodjele simbolizira povećanje broja fotona s kraćim valnim duljinama koji bolje razlučuju informaciju o položaju, čime je ovaj rezultat u skladu s predviđanjima dekoherenčije: foton koji bolje razluči položaj čestice ujedno je i više lokalizira.



Slika 5.3: Logaritamska vremenska skala dekoherenčije u ovisnosti o temperaturi za $k_{\max} = 1$ i $k_{\max} = 800$ ($\Delta x = 10^{-3}$ cm, $a = 10^{-6}$ cm, $(\epsilon - 1)/(\epsilon - 2) = 1$). Za ove uvjete red počinje divergirati već nakon 180 K i zato je gornja granica uzeta samo do 160 K.

Osim vremenske skale u literaturi (npr. [13, 14, Tablice 3.1]) često se navodi i brzina lokalizacije Λ (odnosno ovdje Λ_1) kao konkretan rezultat lokalizacije raspršenjem. Problem je s parametrom Λ taj što on u ovdje napravljenom izvodu više nije jedinstven jer postoje i viši momenti Λ_k koji značajno doprinose svakoj izvedenoj fizikalnoj veličini u kojoj ne vrijedi ocjena $|\Delta x|^2 |\Lambda_2/\Lambda_1| \ll 1$. Iz usporedbe članova reda za parametre $T = 300$ K i 10^{-3} cm slijedi grub

uvjet da $|\Delta x| \ll 0.0001$ cm, pa samo u tom slučaju korištenje isključivo $\Lambda = \Lambda_1$ ima smisla (vidljivo i na slici 5.2).

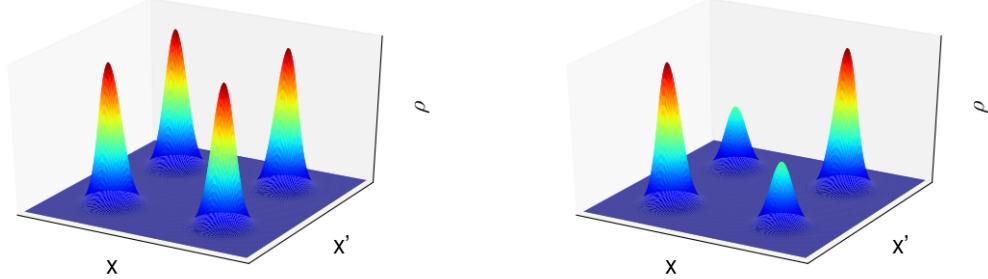
Efekt lokalizacije, odnosno gubitka prostorno koherentnih članova može se vizualizirati na superpoziciji dvaju Gaussianskih valnih paketa razmaknutih za $2d$:

$$\Psi(x) = \Psi_1(x) + \Psi_2(x) = N_1 e^{-(x-d)^2} + N_2 e^{-(x+d)^2} \quad (5.61)$$

pa matrica gustoće $\rho(x, x') = \Psi(x)\Psi(x')$ ima četiri vrha: dva na dijagonalni ($x = x'$) i dva interferentna ($x = -x'$). Iz (5.51) integracijom po vremenu dobiva se:

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t) = e^{-t \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_k (\mathbf{x}-\mathbf{x}')^{2k}} \rho(\mathbf{x}, \mathbf{x}', 0) \quad (5.62)$$

što znači da s vremenom nestaju interferentni vrhovi (slika 5.4).



Slika 5.4: (a) U početnom trenutku ($t = 0$), interferentni članovi prisutni su jednako kao i dijagonalni. (b) Nakon nekog vremena ($t = 10$ s) interferentni članovi smanjuju se kao rezultat dekoherencije. Brzina smanjivanja interferentnih članova ovisi i o ovdje izračunatim višim članovima sume koji doprinose u ovisnosti o parametrima u (5.58).

Daljnji koraci u ovom smjeru bili bi primjena ovog modificiranog faktora dekoherencije uz hamiltonijan slobodne čestice:

$$\hat{H}(x, p) = \frac{\hat{p}^2}{2m} \equiv -\frac{1}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad (5.63)$$

čime bi se dobila nova master jednadžba:

$$\frac{\partial \rho_S(x, x', t)}{\partial t} = -\frac{i}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x'^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \rho_S(x, x', t) - \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_k (x - x')^{2k} \rho_S(x, x', t). \quad (5.64)$$

Uvrštavanjem Gausianskog valnog paketa kao početnog uvjeta ove parcijalne diferencijalne jednadžbe, ali samo s prvim članom sume, u literaturi se standardno izvode parametri kao što je koherentna duljina $l(t)$, širina ansambla $\Delta X(t)$ ili širenje distribucije impulsa $\Delta P(t)$ [14, 13]. Numeričkim rješavanjem (5.64) moguće bi bilo pronaći iste parametre, čime bi se ova popravka manifestirala i na drugim referentnim veličinama.

6 | Uloga dekoherencije u interpretacijama kvantne mehanike

Dekoherencija objašnjava izostanak interferencije kod makroskopskih objekata zbog čega se na makroskali očituje poznati klasični svijet, ali treba ponoviti da dobivene neprave mješavine nisu ekvivalentne pravim mješavinama, odnosno klasičnim ansamblima. Slikovito su to rekli Joos i Zeh: "Interferentni članovi i dalje postoje, samo nisu tamo" [26]. Nadalje otpornost samo nekih stanja na dekoherenciju objašnjava zašto ti makroskopski objekti poprimaju uvijek samo neka stanja, a ne i njihove superpozicije. Usporedba posljedica dekoherencije s klasičnim pokusom može se pojasniti sljedećim primjerom [37]. Bacanje kovanice u idealnom slučaju daje vjerojatnost $1/2$ da padne glava ili pismo. Konačan ishod uzrokuju okolinski utjecaji na sustav, a u principu praćenjem parametara okoline može se predvidjeti ishod. Nasuprot tomu, kod kvantomehaničkog razmatranja pokusa, uključivanje okoline u razmatranje neće otkriti ishod mjerenja, već će se pokazati da ishodi "glava" ili "pismo" nisu jedini mogući, nego je moguća i bilo koja superpozicija tih stanja.

Dekoherencija ne govori zašto se od svih ishoda odabire samo jedan, odnosno ona sama ne može dati rješenje za mehanizam kolapsa. Zbog toga problem mjerenja nije u potpunosti riješen¹ i treba ga nužno sagledati u kontekstu interpretacija. Većina interpretacija kvantne mehanike nastala je prije otkrića dekoherencije, stoga je opravdano provjeriti kakve im uvjete

¹Neki fizičari i filozofi tvrde da dekoherencija rješava u potpunosti problem mjerenja, što se može vidjeti po anketi [2]. Takvi stavovi mogu se shvatiti kao "dio folklora dekoherencije, što zasluženo izaziva bijes fizičara i filozofa" [38].

dekoherencija postavlja i nude li interpretacije zajedno s dekoherencom rješenje problema mjerena.

6.1 Kopenhaška interpretacija

Različite interpretacije kvantne mehanike postoje od njezinog samog početka i bile su stalni predmet rasprava među njeziniim začetnicima [1]. U tim ranim raspravama pobjedu u smislu šire prihvaćenosti odnijela je interpretacija koju je predstavljao Niels Bohr. Werner Heisenberg, Bohrov suradnik i asistent, kasnije ju je nazvao kopenhaška interpretacija prema danskom Koppenhagenu, koji je bio sjedište njihove zajedničke škole za novu teoriju "kvantizirane akcije". Heisenberg je kasnije napustio neke Bohrove ideje pridavši valnoj funkciji i značaj izvan samog mjerena [39, 40], a uz to je sam Bohr mijenjao svoje stavove u raspravama s Einsteinom [22] pa je vrlo teško već tada odrediti što zapravo predstavlja kopenhaška interpretacija.

Bohrov originalni prijedlog može se sumirati na sljedeći način [40]:

Ljudsko iskustvo definira koncepte koji omogućuju i ograničuju objektivnu spoznaju prirode. Koncepti klasične fizike samo su specifikacije tih koncepata. Oni su ujedno i jedini način na koji možemo razumjeti i prenijeti rezultate eksperimenata kvantnih fenomena, a primjenjivi su sve dok god je Planckova konstanta zanemariva u odnosu na akciju u eksperimentu. U suprotnom ih treba ograničiti i primijeniti ovisno o eksperimentalnom postavu, što pak ovisi o principu komplementarnosti. Komplementarnost predstavlja međusobnu isključivost nekih mjerenih veličina (npr. položaja i imuplsa), ali je ukupno objektivno znanje o objektu moguće dobiti različitim eksperimentima. Kvantnomehanički formalizam nema "slikovitu" reprezentaciju i valna funkcija ima samo simboličan karakter bez ikakve zasebne stvarnosti. Samo kvadrat apsolutne vrijednosti valne funkcije izražava vjerojatnost amplitude ishoda mjerena, čime Bohr prihvaca Bornovu statističku interpretaciju i odbija postojanje bilo kakvog kolapsa valne funkcije same po sebi. Mjereni ishodi mogu biti samo klasični koncepti poput položaja, impulsa, vremena i energije.

Bohr međutim ne daje jasan stav oko prirode mjernog uređaja. Opće je prihvaćeno da je Bohr zahtijevao postojanje klasičnih mjernih uređaja zbog njegovog inzistiranja na klasičnim

konceptima, ali izgleda da je takav stav tek naknadno proizašao iz pozitivističkog tumačenja Bohrove filozofije jer je on sam tvrdio da i mjerni uređaji mogu biti opisati kvantnom mehanikom [41]. Ako se Bohr suprotstavljao Einsteinu² tvrdeći da je nova teorija potpuna [22] i uz to prihvaćao da je svaki makroskopski objekt sastavljen od mikroskopskih, kvantnih sustava, teško je shvatiti kako je mogao banalno zahtijevati i podjelu fizike na onu mikroskopskog i makroskopskog svijeta te postojanje klasičnih uređaja koji nisu opisani kvantnom mehanikom. Pretpostavljajući da Bohrove riječi imaju nekog smisla, sve upućuje na to da podjelu svijeta na kvantni i klasični nije shvaćao na materijalnoj osnovi, već kao potrebu koja bi osigurala nedvosmislenu i objektivnu komunikaciju između znanstvenika. Zbog toga postoje pokušaji revizije onoga što se uobičajeno smatra Bohrovom interpretacijom i filozofijom da bi se dobila konzistentna i jasna interpretacija bazirana na Bohrovim idejama [41].

Danas prevladava mišljenje da je Bohrova, odnosno kopenhaška interpretacija ona u kojoj, pored ranije navedenoga, “a priori” postoji klasična domena i klasični mjerni instrumenti. Zbog toga se često kritizira [42] i u konačnici odbacuje kao neprihvatljiva jer klasična domena upravo dekoherencijom dinamički proizlazi iz postulata kvantne mehanike [14] te je nije potrebno neovisno postulirati. Time je sigurno dokinuto pozitivističko gledanje na kopenhašku interpretaciju, a u očima mnogih i ona sama.

6.2 Standardne interpretacije

Zbog očito nepotpunoga i nedovoljno razjašnjenoga Bohrovog nasljeđa, Bohrova interpretacija reinterpretirana je na različite načine, što je dovelo do cijelog niza novih interpretacija koje nose naziv standardne, ortodoksne ili čak i kopenhaške³. Danas su standardne interpretacije sinonim za indeterminizam, Bohrov princip korespondencije, Bornovu statističku interpretaciju valne funkcije i Borhovu komplementarnost kod određenih atomskih fenomena [40]. Ujedno

²A. Einstein, iako jedan od začetnika kvantne teorije, bio je jedan od njezinih najvećih kritičara tako što je prvenstveno želio osporiti njezinu potpunost, a najpoznatiji je primjer EPR-ov paradoks [16].

³U ovom tekstu pod kopenhaškom interpretacijom vodit će se samo ona opisana u prethodnom odjeljku, temeljena na Bohrovim idejama.

im je glavna karakteristika kolaps valne funkcije, makar o samoj prirodi kolapsa ne govore određeno [14].

U ovisnosti o naravi kolapsa, standardne interpretacije dijele se na one u kojima su valna funkcija i kolaps elementi zbilje, što upućuje na von Neumannov pristup kod opisivanja mjerenja, te na one koje valnu funkciju i kolaps shvaćaju isključivo epistemološki, a mjerjenje kao čin prikupljanja dodatnih informacija. Von Neumannov pristup karakteriziran je pitanjem u kojem trenu se događa kolaps, a put često završava na tzv. psihofizičkom paralelizmu u kojem je svijest izuzeta iz fizikalnog opisa svijeta te je kolaps posljedica subjektivne percepcije promatračeve svijesti [43]. Ovdje nema “a priori” razloga zašto se kolaps ne bi dogodio na bilo kojem ranijem mjestu u von Neumannovu lancu [38].

Iz skupine epistemoloških standardnih interpretacija može se izdvojiti minimalni instrumentalistički pristup⁴ koji danas prevladava u fizičarskoj zajednici. Neki znanstvenici došli su i do stava da je takav pristup sasvim opravdan, odnosno da kvantnoj mehanici interpretacija nije ni potrebna jer se može shvatiti kao samodostatan alat za predviđanje ishoda eksperimenta i da time ništa ne prejudiciraju o postojanju fundamentalnijih teorija [44]. Na tom tragu razvijeni su i metodološki izvodi postulata kvantne mehanike kroz sam čin mjerjenja [45]. Paradoksi teorije najčešće se odbacuju jer proizlaze iz krive upotrebe teorijskih koncepata koji ne reprezentiraju stvarne objekte, već se kvantna mehanika mora shvatiti isključivo u kontekstu mjerjenja. Kolaps je valne funkcije samo postupak dobivanja novog znanja.

Problem je instrumentalističkog pristupa taj što kvantna mehanika tada ne može ništa reći o objektivnoj stvarnosti, a takvog anti-realizma malo se koji fizičar dosljedno drži [46, str. 153]:

Pragmatični je pristup kvantnoj teoriji dovoljno bezopasan kad se gleda kao pomoćna pozicija koja ne isključuje daljnji odvažan napredak i u tehničkom i u konceptualnom sadržaju teorije. Ali ako se pragmatičan pristup uzme kao fundamentalan, onda je implicitna filozofska pozicija strogo instrumentalistička u tonu. Kvantna je teorija tada viđena kao skup recepata koji izbacuju korisne rezultate,

⁴Instrumentalistički pristup po svom sadržaju i nije interpretacija u pravom smislu te se često ironično naziva pristup “zašuti i računaj” (eng. *shut up and calculate*).

ali ne daju nikakvu direktnu sliku (niti pridjeljuju ikakvo značenje) stvarnosti za koju većina znanstvenika prepostavlja da leži iza njihovih opažanja. Mnogi su konceptualni problemi sigurno uklonjeni tom procedurom, ali je plaćena cijena u nedvosmislenom anti-realizmu i mnogi fizičari teško vjeruju da je rezultirajući paket potpuni opis fizikalnoga svijeta kako njezini predлагаči tvrde.⁵

Dosljedan instrumentalist ne može ustvrditi ni postojanje tzv. objektivnih veličina dobivenih eksperimentom (kao npr. položaj ili impuls) jer su one također rezultati mjerena.

Dekoherenca unutar ove skupine interpretacija ne rješava problem ishoda mjerena. Ona svojim djelovanjem omoguće dobivanje privida pravih mješavina koje čovjek percipira kao klasične ansamble, međutim dekoherencija ne odabire konačan ishod, zbog čega i dalje ostaje potreba za kolapsom.

Dekoherenca ipak rasvjetjava jednu bitnu komponentu u ovim interpretacijama. Formalizam dozvoljava postojanje proizvoljne observable koja je dana Hermitskim operatorom što upućuje na to da je moguće mjerene beskonačno mnogo fizikalnih veličina pojedinog kvantnog sustava. Standardne interpretacije zaključuju da eksperimentator bira koju će observable mjeriti i time eksperimentator određuje svojstva sustava. U stvarnosti eksperimentator nema takvu slobodu na raspolaganju, već je observable, a time i svojstvo sustava određeno dizajnom mjernog uređaja (pog. 4.2). Imajući to na umu, nemoguće je više shvaćati mjerene samo kao čin dobivanja rezultata željene observable, već se mora razmotriti i kontekst mjernog uređaja. Von Neumannov program prvi je korak u tom smjeru, ali odgovor na pitanje koje se observable točno mjeri daje tek dekoherencija. Eksperimentator dakle mora u obzir uzeti dekoherenciju pri stvaranju svog eksperimentalnog postava i ona, odnosno utjecaj okoline, odredit će mu koja fizikalna svojstva sustava može mjeriti.

⁵S engleskog preveo autor ovog diplomskog rada.

6.3 Interpretacije relativnih stanja

Ako se valna funkcija shvati kao realni entitet, onda kolaps spada u još jedan proces koji dirigira evolucijom sustava. Željom da se izbjegne uvođenje novog fizikalnog procesa i time zadrži samo unitarna evolucija (jednadžba 2.3) kao jedina evolucija sustava dolazi se do skupa interpretacija relativnih stanja⁶. Prvi je razvio cijelu ideju u formi interpretacije Hugh Everett [47]. Bez kolapsa i posebne uloge promatrača, von Neumannov program u konačnici zahtijeva postojanje ukupne valne funkcije cijelog svemira izvan kojega ne postoji novi sustav na koji bi se svemir mogao kvantno ispreplesti. Promatrač tada opaža svoje stanje relativno u odnosu na ostatak složenog sustava. Pri završetku mjerjenja svi su ishodi realizirani, čime je ovaj pristup u potpunosti deterministički. Sve realizacije tumače se kao grane novih svjetova, svemira, umova i sl.

Osim što povlače gomilu metafizičkih pitanja, interpretacije relativnih stanja u svojoj formalnoj realizaciji susreću se primarno s dvama problemima:

- problemom preferirane baze – razdvajanje grana može se dogoditi u proizvoljnoj bazi,
- problemom fundamentalnih vjerojatnosti – u determinističkoj teoriji nema mjesta za fundamentalne vjerojatnosti, stoga se Bornovo pravilo mora izvesti kao posljedica nekog drugog mehanizma.

Problem preferirane baze barem aproksimativno⁷ objašnjava dekoherencija [14] i time uvelike spašava ove interpretacije. Prije dekoherencije smatralo se da Schmidtov rastav može dati egzaktne grane, ali takav rastav ne mora nužno dati klasična i prostorno lokalizirana stanja, a uz to ne mora biti ni jedinstven kao što je pokazano u Dodatku B.

Problem vjerojatnosti u interpretacijama ovog tipa nije riješen niti dekoherencija može tu puno pomoći jer je Bornovo pravilo iskorišteno u definiranju reduciranih matrica gustoće koje su temelj matematičkog alata dekoherencije, ali postoje pokušaji pod nazivom invarijantnost

⁶Ove interpretacije poznate su još pod nazivom pristupi bez kolapsa (eng. *Collapse-free approach*) [43]

⁷Aproksimativno jer je superselekcija uzrokovana okolinom dinamički proces.

pomognuta okolinom (eng. *environment-assisted invariance*) da se Bornovo pravilo izvede iz drugih postulata interpretacija relativnih stanja.

Ovo nisu jedini pristupi ka razrješenju problema mjerena. Postoje još pristupi u kojima se modificira Schrödingerova jednadžba da bi se na makroskali reproducirao fizikalni kolaps, zatim Bohmova mehanika gdje se uvodi dodatni mehanizam da bi se zadržao intuitivno pristupačan klasičan opis čestica i dr. [19].

7 | Zaključak

Želja je prirodnih znanosti oduvijek bila opisati objektivnu stvarnost i zbog toga su posljedice kvantne mehanike donijele veliko razočaranje jer središnje mjesto u toj teoriji zauzima mjerjenje koje neraskidivo ovisi o promatraču. Predloženi su mnogi pristupi kako da se mjerjenje shvati unutar te teorije i razriješi nedoumica oko njezine naravi, međutim dosad oko toga nema konsenzusa u znanstvenoj zajednici. Mnogi su izbacili cijelu problematiku izvan domene fizike vjerojatno kako bi zadržali egzaktnost i nedvosmislenost fizikalne metode, ali su time izostavili objašnjenje i mogućnost kritike temelja na kojoj grade svoje druge teorije i spoznaje. Nema suštinskog razloga zašto bi kvantna mehanika bila konačan alat za spoznavanje prirode. Dovoljno je sjetiti se mnogo puta citiranoga Lorda Kelvina prije velikih revolucija u fizici krajem 19. stoljeća koji je govorio da je program fizike završen te da su ostala samo dva oblaka koja treba razjasniti unutar postojeće paradigmе. Iza jednog oblaka skrivala se specijalna teorija relativnosti, a iza drugog kvantna mehanika. Problem mjerjenja može se shvatiti kao novi "oblak" u modernoj fizici. Možda će njegovo razrješenje dovesti do novih temeljnih uvida u razumijevanje prirode, a možda ne skriva ništa suštinski važno. Čak i ako se unutar pragmatičnoga pristupa problem mjerjenja shvati kao pseudoproblem, i ako interpretacije teorije nisu potrebne, potraga za filozofskim i interpretativnim modelima u najmanju je ruku metodološki fundamentalna [48, pog. 46.6] jer su upravo takvi pokušaji (EPR, Schrödingerova mačka, teorije skrivenih varijabli i sl.) doveli do ključnih napredaka same kvantne mehanike.

U ovom je radu pokazano da uzimanjem otvorenih sustava u obzir kvantni formalizam u obliku dekoherenčije daje određene odgovore u domeni temeljnih pitanja. Prvenstveno je tu rješenje problema preferirane baze i problema neopažanja interferencije na makroskali.

Ključan model dekoherencije predstavlja lokalizacija sustava zbog sudara s česticama okoline te je upravo taj model ovdje izložen. Razmatrajući njegove pretpostavke i korištene aproksimacije, predložena je kvantitativna popravka u domeni koja izlazi izvan dugovalne aproksimacije. Diskutirano je kada je napravljena popravka primjenjiva na primjeru fotona, a razlika između dosadašnjeg izvoda i ovog doprinosa prvenstveno je prezentirana kroz vremensku skalu dekoherencije u ovisnosti o prostornom razmaku između koherentnih stanja (slika 5.2) i u ovisnosti o temperaturi (slika 5.3). Međutim pri primjeni ovog računa na fotone dolazi se i do analitičke granice do koje je ovaj pristup opravdan, što je također zanimljivo jer prijašnji račun takvu granicu nije poznavao, a davao je sve nepreciznija predviđanja udaljavanjem od dugovalnog limesa. Ovo dakle može biti motivacija za traženje alternativnog pristupa u rješavanju ovog bitnog modela.

Eksperimentalna verifikacija ovdje je izostala zbog nepostojanja pokusa koji bi precizno mjerio baš tu razlikovnu domenu, ali brzi razvoj eksperimentalnih tehnika u ovom području ne isključuje mogućnost provjere u budućnosti. Brz je razvoj prvenstveno motiviran razvojem kvantnih računala koja se sve češće javljaju kao odgovor na problem približavanja klasičnih računala svojim fizikalnim granicama, nakon kojih se više ne mogu smanjivati i ubrzavati. Dekoherencija je ovdje naročito zanimljiva jer predstavlja glavni izvor računskih pogrešaka kod kvantnih računala.

U kontekstu interpretacija, treba se shvatiti da je dekoherencija direktna posljedica formalizma kvantne mehanike i ne sadrži nikakve dodatne pretpostavke da bi se mogla nazvati interpretacijom ili novom teorijom. Uz to, program dekoherencije već je potvrđen na raznim eksperimentalnim postavima [14, pog. 6]. Stoga svaka interpretacija, ako prihvata formalizam, mora zadovoljiti uvjete koje joj nameće dekoherencija. U radu je razmotreno kako dekoherencija utječe na standardne interpretacije i interpretacije relativnih stanja. Time se pobija tvrdnja da su interpretacije isključivo filozofska domena o kojoj fizika sama više ništa ne može reći. Nema razloga ne vjerovati da se dalnjim razvojem eksperimentalnih metoda koje proučavaju izolirane kvantne sustave neće postaviti dodatni uvjeti na izbor interpretacija te same interpretacije podvrći eksperimentalnoj provjeri¹.

¹Zagovornici interpretacija relativnih stanja idu čak toliko daleko tvrdeći da će konstrukcija kvantnog računala zasigurno potvrditi njihovu interpretaciju [49].

Prema analogiji s kozmologijom koja je dugo imala tretman neegzaktnog područja fizike, a tek je pojavom opažanja koja mjere pozadinsko kozmičko zračenje ušla u svoje "zlatno doba", može se očekivati da bi se slično moglo dogoditi i temeljnim problemima kvantne mehanike razvojem eksperimentalnih metoda koje mogu mjeriti kvantne sustave neometane dekoheren-cijom.

A | Von Neumannovo mjerjenje

U potpoglavlju 2.3 objašnjen je mehanizam kvantne isprepletenosti, ali nije navedeno kako dva sustava dolaze u isprepleteno stanje ako su prije toga bili odvojeni. Taj se proces može prikazati von Neumannovim opisom mjerena koji je von Neuman izložio u [3].

Ukupan sustav mjernog instrumenta i proučavanog sustava opisan je valnom funkcijom $|\Psi\rangle$. U početnom trenutku vrijedi:

$$|\Psi(0)\rangle = |\psi\rangle|M_0\rangle , \quad (\text{A.1})$$

dok je evolucija sustava dana s (2.3):

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}|\Psi(0)\rangle . \quad (\text{A.2})$$

Prepostavlja se općeniti hamiltonijan u kojem dominira hamiltonijan međudjelovanja $\hat{H} = \hat{H}_O + \hat{H}_{OM} + \hat{H}_M \approx \hat{H}_{OM} = g\hat{O}\hat{M}$ gdje je g konstanta vezanja, \hat{O} operator observable koja djeluje na prostoru proučavanog sustava \mathcal{H}_O , a \hat{M} na prostoru uređaja \mathcal{H}_M . Početna stanja mogu se raspisati:

$$|\psi\rangle = \sum_i a_i|o_i\rangle \quad (\text{A.3})$$

$$|M_0\rangle = \sum_j b_j|m_j\rangle \quad (\text{A.4})$$

gdje su $|o_i\rangle$ i $|m_j\rangle$ svojstvena stanja operatora \hat{O} i \hat{M} : $\hat{O}|o_i\rangle = o_i|o_i\rangle$, $\hat{M}|m_j\rangle = m_j|m_j\rangle$. Operatori \hat{O} i \hat{M} hermitski su pa su njihova svojstvena stanja ortogonalna:

$$\hat{O}^\dagger = \hat{O} \Rightarrow 0 = \langle o_n|\hat{O}^\dagger - \hat{O}|o_m\rangle = (o_n - o_m)\langle o_n|o_m\rangle \Rightarrow \langle o_n|o_m\rangle = 0 \quad \text{za } o_n \neq o_m. \quad (\text{A.5})$$

Raspisivanjem ukupnog stanja i primjenom hamiltonijana slijedi:

$$\begin{aligned}
 |\Psi(t)\rangle &= e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}|\psi\rangle|M_0\rangle \\
 &= e^{-\frac{i}{\hbar}g\hat{O}\hat{M}t} \sum_i a_i|o_i\rangle \sum_j b_j|m_j\rangle \\
 &= \sum_{ij} a_i b_j e^{-\frac{i}{\hbar}g o_i m_j t} |o_i\rangle|m_j\rangle \\
 &= \sum_{ij} a_i b'_j(o_i, t) |o_i\rangle|m_j\rangle \\
 &= \sum_i a_i |o_i\rangle \sum_j b'_j(o_i, t) |m_j\rangle \\
 &= \sum_i a_i |o_i\rangle|m'_i(t)\rangle
 \end{aligned} \tag{A.6}$$

gdje je $|m'_i(t)\rangle = \sum_j b'_j(o_i, t) |m_j\rangle$.

U slučaju da je proučavani sustav već pripremljen u nekom poznatom stanju $|\psi\rangle$, opservabla $\hat{O} = |\psi\rangle\langle\psi|$ dat će to isto stanje (idealno mjerjenje), a raspis (A.6) postaje:

$$\begin{aligned}
 |\Psi(t)\rangle &= e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}|\psi\rangle|M_0\rangle \\
 &= e^{-\frac{i}{\hbar}g\hat{O}\hat{M}t}|\psi\rangle \sum_j b_j|m_j\rangle \\
 &= |\psi\rangle \sum_j b_j e^{-\frac{i}{\hbar}g m_j t} |m_j\rangle \\
 &= |\psi\rangle \sum_j b'_j(\psi, t) |m_j\rangle \\
 &= |\psi\rangle|M_\psi(t)\rangle .
 \end{aligned} \tag{A.7}$$

B | Schmidtov rastav

Schmidtov rastav (eng. *Schmidt decomposition*) teorem je linearne algebre koji pokazuje da se vektor složenog sustava uvijek može zapisati kao tensorski produkt ortonormiranih stanja dvaju podsustava, odnosno formalno [5]:

Teorem (Schmidtov rastav). Za bilo koje čisto stanje $|\Psi\rangle_{12}$ složenog sustava \mathcal{S}_{12} uvijek je moguće pronaći ortonormirani skup vektora $\{|j\rangle_1\}$ za sustav \mathcal{S}_1 i $\{|j\rangle_2\}$ za sustav \mathcal{S}_2 tako da vrijedi

$$|\Psi\rangle_{12} = \sum_j c_j |j\rangle_1 |j\rangle_2 \quad (\text{B.1})$$

gdje su c_j ne-negativni realni brojevi (tzv. Schmidtovi koeficijenti) sa svojstvom $\sum_j c_j^2 = 1$.

Dokaz. Neka sustavi \mathcal{S}_1 i \mathcal{S}_2 imaju iste dimenzije¹ i neka su $\{|i\rangle\}$ i $\{|k\rangle\}$ ortonormirane baze tih sustava. Ukupno stanje može se zapisati kao

$$|\psi\rangle = \sum_{ik} a_{ik} |i\rangle |k\rangle \quad (\text{B.2})$$

gdje je a matrica kompleksnih brojeva. Zbog singularnog rastava [34]

$$a = u d v \quad (\text{B.3})$$

gdje je d dijagonalna matrica s ne-negativnim elementima, a u i v unitarne matrice, slijedi:

$$|\psi\rangle = \sum_{jik} u_{ij} d_{jj} v_{jk} |i\rangle |k\rangle . \quad (\text{B.4})$$

Definiranjem $|j\rangle_1 \equiv \sum_i u_{ij} |i\rangle$, $|j\rangle_2 \equiv \sum_k v_{jk} |k\rangle$ i $c_j \equiv d_{jj}$ dobiva se (B.1).

¹Općenitije ovdje nije potrebno jer sustav i mjerni uređaj imaju korelaciju jedan na jedan.

Ortonormiranost: Ako se uzmu dva vektora $|j\rangle$ i $|j'\rangle$ iz skupa $\{|j\rangle_1\}$, njihova ortonormiranost može se pokazati njihovim skalarnim umnoškom:

$$\begin{aligned}\langle j|j'\rangle &= \sum_i \langle i| [u^\dagger]_{ji} \sum_{i'} u_{i'j'} |i'\rangle \\ &= \sum_{ii'} u_{ij}^* u_{i'j'} \langle i|i'\rangle.\end{aligned}\tag{B.5}$$

Vektori $|i\rangle$ i $|i'\rangle$ prema početnoj pretpostavci su ortonormirani ($\langle i|i'\rangle = \delta_{ii'}$), a matrica u unitarna $u^\dagger u = \sum_{ij} u_{ji}^* u_{ji} = I$. Iz toga slijedi:

$$\langle j|j'\rangle = \sum_i u_{ji}^* u_{j'i} = \delta_{jj'}\tag{B.6}$$

čime je pokazana ortonormiranost skupa $\{|j\rangle_1\}$. Analogno vrijedi za vektore iz $\{|j\rangle_2\}$ jer su $\{|k\rangle\}$ također ortonormirani i matrica v_{jk} je unitarna.

Jedinstvenost: Rastav je jedinstven ako su svi Schmidtovi koeficijenti c_j međusobno različiti. To slijedi iz činjenice da su c_j pozitivni korijeni svojstvenih vrijednosti λ_j od matrica $a^T a$ i aa^T :

$$\begin{aligned}a^T a \mathbf{u}_j &= \lambda_j \mathbf{u}_j \\ aa^T \mathbf{v}_j &= \lambda_j \mathbf{v}_j\end{aligned}\tag{B.7}$$

gdje svojstveni vektori \mathbf{u}_j i \mathbf{v}_j čine matrice $u = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots)$ i $v = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots)$ u singularnom rastavu (B.3). Ako svojstvene vrijednosti $\lambda_j = c_j^2$ nisu međusobno različite, tada ni vektori \mathbf{u}_j i \mathbf{v}_j i posljedično matrice u i v koje čine $|j\rangle_1$ i $|j\rangle_2$ nisu jednoznačno određene. \square

C | Izvorni kodovi programa korištenih u radu

C.1 Program double_slit.py

Implementacija uz pomoć Huygensovog principa - svaka točka pukotine novi je izvor vala.
Parametri: k - valni vektor, start_y - udaljenost pukotine od središta, m - raspoznatljivost mjernog uređaja.

Dodatni paketi za Python 2.7: matplotlib[50]

```
#!/usr/bin/python
# -*- coding: utf-8 -*-
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

k = 50
start_y = .55
m = 1

def new_wave( source, k ):
    return np.exp( -1j * k * np.sqrt( (X-source[0])**2 + ( Y-source[1] )**2 ) )

X,Y = np.mgrid[0:5:0.01,-5:5:0.01]
psi1 = 0; psi2 = 0; psi12 = 0
for i in range(100):
    source1 = ( 0, -start_y + i*0.001 )
```

```

        source2 = ( 0, start_y - i*0.001 )

    psi1 += new_wave( source1, k )
    psi2 += new_wave( source2, k )

Z_off = ( abs( psi1 )**2 + abs( psi2 )**2 )/2 + ( psi1*psi2.conjugate()**m ).real
Z_on = ( abs( psi1 )**2 + abs( psi2 )**2 )/2

f, (( ax1, ax2 ), ( ax3, ax4 )) = plt.subplots(2, 2)
f.subplots_adjust( hspace=0, wspace=.05 )
plt.setp( [i.get_xticklabels() for i in f.axes], visible=False )
plt.setp( [i.get_yticklabels() for i in f.axes[:-2]], visible=False )

ax1.imshow( Z_off, cmap = plt.cm.bone )
ax3.bar( range(len(Z_off[0])), Z_off[100]/sum(Z_off[100]), antialiased=True )
ax3.set_ylim(.0004)

ax2.imshow( Z_on, cmap = plt.cm.bone )
ax4.bar( range(len(Z_on[0])), Z_on[100]/sum(Z_on[100]), antialiased=True )
ax4.set_ylim(.0006)
ax4.get_yaxis().tick_right()

plt.tight_layout()
plt.show()

```

C.2 Program factor.py

Program iscrtava funkciju (4.8).

Parametri: size - za koje sve N -ove iscrtati funkciju, time - do kojeg vremena i s kojom rezolucijom.

Dodatni paketi za Python 2.7: matplotlib[50]

```

#!/usr/bin/python
# -*- coding: utf-8 -*-

```

```
from mpmath import *
from numpy import arange
from random import random
from pylab import *

size = ( 5, 20, 50 )
time = arange( 0, 10, 0.05 )

gs = [ random() for i in range(size[-1]+1) ]
alphas = [ random() for i in range(size[-1]+1) ]

def term( i, t ):
    g_i = gs[int(i)]
    a = alphas[int(i)]
    return cos( g_i*t ) + ( 2*a**2 - 1 ) * 1j * sin( g_i*t )

fig = figure()
grid(True)
xlabel('t')
ylabel('Re{r(t)}')

for N in size:
    r = []
    for t in time:
        r.append(abs(re(nprod( lambda i: term( i, t ), [1, N]))))
    plot( time, r )
    del r

legend(( 'N=5' , 'N=20' , 'N=50' ), 'upper right')
show()
```

C.3 Program decoh3d.py

Program simulira evoluciju jednadžbe (5.62).

Parametri: dist - udaljenost između dvaju Gausijana d , kmax - član reda do kojeg se računa faktor dekoherencije.

Dodatni paketi za Python 2.7: numpy, matplotlib[50]

```
#!/usr/bin/python
# -*- coding: utf-8 -*-

from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
from matplotlib import cm
from matplotlib.ticker import LinearLocator, FormatStrFormatter
from mpmath import *
from numpy import arange
from math import pi
from scipy.special import zeta
import pylab
pylab.ion()

kmax = 10
dist = 10**(-4)/5

def Kpart( k ):
    return (-1)**(k+1) * 2**((k+5)) * (2*k+3) * (2*k+5) * (k**2+3*k+4) * zeta(2.*k+7, 1)

def coeff(k, T, a):
    return Kpart(k)*9/4*3*10**10*8/(9*pi)*(4.3670378*T)**(2*k+7) * (a)**6

fig = pylab.figure()
ax = pylab.gca(projection='3d')
step = dist/50
X = np.arange(-2*dist, 2*dist, step)
Y = np.arange(-2*dist, 2*dist, step)
X, Y = np.meshgrid(X, Y)
```

```
T = np.arange(0, 20, 0.1)
scale = 200000
PsiX = np.exp( -(scale*(X-dist))**2 ) + np.exp( -(scale*(X+dist))**2 )
PsiY = np.exp( -(scale*(Y-dist))**2 ) + np.exp( -(scale*(Y+dist))**2 )

def D( k_max ):
    result = 0
    T = 400
    a = 10**(-6)
    for k in xrange(1,k_max+1):
        result = result + coeff(k,T,a)*(X-Y)**(2*k)

    return result

for t in xrange( len(T)-1 ):
    ax.plot_surface(X, Y, PsiX*PsiY*np.exp(-1*D(kmax)*t), rstride=1,
                    cstride=1, cmap=cm.jet, linewidth=0, antialiased=True)
    ax.set_zlim(0, 1.01)

    ax.xaxis.set_major_locator(LinearLocator(0))
    ax.xaxis.set_major_locator(LinearLocator(0))
    ax.yaxis.set_major_locator(LinearLocator(0))

    ax.set_xlabel('x', fontsize=18)
    ax.set_ylabel(r"x'", fontsize=18)
    ax.set_zlabel(r"$\rho$", fontsize=18)

    ax.view_init(elev=30., azim=t/2.)

    pylab.draw()
    for coll in ax.collections:
        plt.gca().collections.remove(coll)

pylab.ioff()
pylab.show()
```

Bibliografija

- [1] G. Bacciagaluppi and A. Valentini. Quantum Theory at the Crossroads: Reconsidering the 1927 Solvay Conference. *arXiv:quant-ph/0609184*, September 2006. 1, 51
- [2] M. Schlosshauer et al. A Snapshot of Foundational Attitudes Toward Quantum Mechanics. *arXiv:1301.1069*, January 2013. 1, 50
- [3] John Von Neumann. *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*. Princeton University Press, translation - from german edition, October 1996. 2, 16, 60
- [4] Erich Joos. Elements of Environmental Decoherence. *arXiv:quant-ph/9908008*, August 1999. 2
- [5] G. Auletta et al. *Quantum Mechanics*. Cambridge University Press, 1 edition, April 2009. 2, 6, 7, 9, 15, 62
- [6] Steven Weinberg. *Lectures on Quantum Mechanics*. Cambridge University Press, November 2012. 2
- [7] The Nobel Prize in Physics 2012. http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/2012, January 2013. 2
- [8] Dov M. Gabbay, Paul Thagard, and John Woods. *Philosophy of Physics (Handbook of the Philosophy of Science) 2 volume set*. North Holland, 1 edition, December 2006. 4, 10
- [9] R. Eisberg and R. Resnick. *Quantum Physics of Atoms, Molecules, Solids, Nuclei, and Particles*. Wiley, 2 edition, January 1985. 4

- [10] A. Galindo and P. Pascual. *Quantum Mechanics I*. Springer, 1st edition, January 1990. 4, 5, 12, 16
- [11] Eric W. Weisstein. Self-Adjoint – from Wolfram MathWorld. <http://mathworld.wolfram.com/Self-Adjoint.html>. 6
- [12] Struna - terminološka baza hrvatskoga strukovnog nazivlja. <http://struna.ihjj.hr/naziv/kvantna-prepletost/11698>, 2011. 7
- [13] D. Giulini et al. *Decoherence and the Appearance of a Classical World in Quantum Theory*. Springer, January 1996. 7, 31, 39, 47, 49
- [14] Maximilian A. Schlosshauer. *Decoherence and the Quantum-To-Classical Transition*. Frontiers Collection. Springer Berlin Heidelberg, 2007. 8, 17, 25, 27, 28, 29, 32, 33, 39, 41, 43, 45, 47, 49, 52, 53, 55, 58
- [15] Arthur Fine. The Einstein-Podolsky-Rosen Argument in Quantum Theory. In Edward N. Zalta, editor, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Winter 2012 edition, 2012. 8
- [16] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen. Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete? *Physical Review*, 47(10):777–780, May 1935. 8, 52
- [17] J. J. Sakurai. *Modern Quantum Mechanics*. Addison Wesley, 1 edition, September 1993. 11
- [18] John D. Trimmer. The Present Situation in Quantum Mechanics: A Translation of Schrödinger's "Cat Paradox" Paper. *Proceedings of the American Philosophical Society*, 124(5):323–338, oct 1980. 16
- [19] Maximilian Schlosshauer. Decoherence, the measurement problem, and interpretations of quantum mechanics. *arXiv:quant-ph/0312059*, December 2003. Rev.Mod.Phys.76:1267-1305,2004. 17, 24, 29, 56
- [20] Klaus Hornberger, Stefan Uttenthaler, Bjoern Brezger, Lucia Hackermueller, Markus Arndt, and Anton Zeilinger. Collisional decoherence observed in matter wave interferometry. (*quant-ph/0303093*), March 2003. Phys. Rev. Lett. 90, 160401 (2003). 18, 32

- [21] A. D. O'Connell et al. Quantum ground state and single-phonon control of a mechanical resonator. *Nature*, 464(7289):697–703, April 2010. 18
- [22] Niels Bohr. *Atomic Physics and Human Knowledge*. Dover Publications, November 2010. 19, 51, 52
- [23] Wojciech H. Zurek. Pointer basis of quantum apparatus: Into what mixture does the wave packet collapse? *Physical Review D*, 24(6):1516–1525, September 1981. 23, 28, 30
- [24] Michael A. Nielsen and Isaac L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press, 2000. 29
- [25] J. J. Halliwell. Two Derivations of the Master Equation of Quantum Brownian Motion. arXiv e-print quant-ph/0607132, July 2006. 31
- [26] E. Joos and H. D. Zeh. The emergence of classical properties through interaction with the environment. *Zeitschrift für Physik B Condensed Matter*, 59(2):223–243, June 1985. 32, 39, 50
- [27] Lajos Diosi. Quantum Master Equation of Particle in Gas Environment. (gr-qc/9403046), March 1994. *Europhys.Lett.*30:63-68,1995. 32, 33, 37
- [28] Klaus Hornberger and John E. Sipe. Collisional decoherence reexamined. arXiv e-print quant-ph/0303094, March 2003. *Phys. Rev. A* 68, 012105 (2003). 32, 37
- [29] Stephen L. Adler. Normalization of collisional decoherence: squaring the delta function, and an independent cross-check. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 39(45):14067, 2006. 32, 37
- [30] Michael S. Chapman et al. Optics and Interferometry with Na_2 Molecules. *Physical review letters*, 74(24):4783, 1995. 32
- [31] John R Taylor. *Scattering theory: the quantum theory of nonrelativistic collisions*. Dover Publications, Mineola, NY, 2006. 32, 35, 36, 37

- [32] Ramamurti Shankar. *Principles of quantum mechanics*. Plenum Press, New York, 1994. 36
- [33] Michael R Gallis and Gordon N Fleming. Environmental and spontaneous localization. *Physical Review A*, 42(1):38, 1990. 37, 44
- [34] Bronštejn et al. *Matematički priručnik*, 2004. 40, 44, 62
- [35] John D. Jackson. *Classical electrodynamics*. Wiley, New York, 1999. 42
- [36] Robert G Bartle. *The elements of integration and Lebesgue measure*. Wiley, New York, 1994. 43
- [37] Tulsi Dass. Measurements and Decoherence. *arXiv:quant-ph/0505070*, May 2005. 50
- [38] Guido Bacciagaluppi. The Role of Decoherence in Quantum Mechanics. In Edward N. Zalta, editor, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Winter 2012 edition, 2012. 50, 53
- [39] Claus Kiefer. On the interpretation of quantum theory - from Copenhagen to the present day. *arXiv:quant-ph/0210152*, October 2002. 51
- [40] Jan Faye. Copenhagen Interpretation of Quantum Mechanics. In Edward N. Zalta, editor, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Fall 2008 edition, 2008. 51, 52
- [41] Don Howard. What makes a classical concept classical? Toward a reconstruction of Niels Bohr's philosophy of physics. *Boston Studies In The Philosophy Of Science*, 153:201–201, 1994. 52
- [42] Wojciech H. Zurek. Decoherence and the transition from quantum to classical – REVISITED. *arXiv:quant-ph/0306072*, June 2003. 52
- [43] Gregg Jaeger. *Entanglement, Information, and the Interpretation of Quantum Mechanics*. Springer, 2009 edition, September 2009. 53, 55
- [44] C. Fuchs and A. Peres. Quantum theory needs no ‘interpretation’. *Physics Today*, 53(3):70–71, 2000. 53

- [45] L. Skala and Kapsa V. Quantum mechanics needs no interpretation. *arXiv:quant-ph/0412175*, December 2004. 53
- [46] C. J. Isham. *Lectures on Quantum Theory: Mathematical and Structural Foundations*. World Scientific Publishing Company, September 1995. 53
- [47] B. S. DeWitt and N. Graham, editors. *Many-worlds Interpretation of Quantum Mechanics*. Princeton University Press, 1st edition, December 1973. 55
- [48] Gennaro Auletta. *Foundations and Interpretation of Quantum Mechanics: In the Light of a Critical-Historical Analysis of the Problems and of a Synthesis of the Results*. World Scientific Pub Co Inc, June 2000. 57
- [49] David Deutsch. David Deutsch's Many Worlds. <http://daviddeutsch.physics.ox.ac.uk/structure/Documents/Non-Technical/Frontiers.html>, 1998. 58
- [50] J. D. Hunter. Matplotlib: A 2D graphics environment. *Computing In Science & Engineering*, 9(3):90–95, 2007. 64, 65, 67

Decoherence and the measurement problem in quantum mechanics

Summary

Decoherence is a relatively new subject in the foundation of quantum mechanics. It reveals significant insights in the measurement problem and provides a strong theoretical ground for many applied areas such as quantum computing.

This work is divided in three parts. The first part gives a general up-to-date review of the subject and introduces some mathematical tools used in the second part. The second part is the central part of the work in which we develop and discuss corrections to a known model of localization due to environmental scattering (sometimes called Quantum Brownian motion). We identified that the weak point of the model is the middle-wavelength range of a scattered particle and showed that the typically used approximation in this model leads to an order-of-magnitude smaller decoherence timescales in comparison with timescales of our results. Using quantum scattering theory, we followed the analytical form of equations as much as possible, but later we were forced to use numerical calculation to get comparable results with those known before.

The third part of the work is devoted to the implication of decoherence to interpretations of quantum mechanics where we tried to systematically and critically review two main classes of interpretations (Standard and Relative-state interpretations) in context of consequences of decoherence.

Keywords: decoherence, measurement problem, localization, environmental scattering, decoherence timescale, interpretations of quantum mechanics